

*Mémoire présenté à l'École nationale d'administration publique
dans le cadre du programme de Maîtrise en administration
publique pour l'obtention du grade de Maître ès science (M. Sc.)*

Mémoire intitulé

**Dosage optimal de prêts et de bourses dans un régime d'aide financière
aux études**

présenté par

Anthony Soucy

Juin, 2026

Mémoire intitulé

**Dosage optimal de prêts et de bourses dans un régime d'aide financière
aux études**

présenté par

Anthony Soucy

Est évalué par les membres du jury suivant :

Mme Marie-Soleil Tremblay, Professeure titulaire, ÉNAP

M. Pier-André Bouchard St-Amant, Professeur agrégé, ÉNAP, Directeur de mémoire

Mme Catherine Michaud-Leclerc, Professeure adjointe, Université Laval, Évaluatrice
externe

Remerciements

J'aimerais d'abord remercier ma directrice et mes collègues du ministère de l'Enseignement supérieur qui m'ont introduit, non seulement au monde de l'administration publique, mais à l'enseignement supérieur comme sujet d'étude. Leur bienveillance et leur dévouement m'ont grandement inspiré. Je souhaite également remercier l'École nationale d'administration publique et ses professeurs pour le support académique et technique tout au long de mon parcours.

Je tiens à remercier Nicolas Bolduc du Groupe de recherche en économie publique appliquée pour ses conseils et son écoute dans une période cruciale de la rédaction de mon mémoire. Je remercie également Pier-André Bouchard St-Amant, mon directeur de mémoire, pour tout l'aide et le support qu'il m'a donné. Sa rigueur et son talent font de lui un professeur hors pair. Il m'a offert des conseils honnêtes et bienveillants tout au long de mon parcours. Il m'aura permis de me développer considérablement durant mes années à l'ÉNAP.

Merci à mes parents Josée et André et à mon frère William de m'avoir toujours fait sentir à la hauteur des défis que je me suis fixé. Votre amour, votre attention et votre écoute me sont très précieux.

Enfin, je réserve mes derniers remerciements pour Geneviève, monoureuse. Merci d'avoir enduré un peu trop d'exposés techniques sur les mathématiques ou les prêts et bourses cette dernière année. Cette traversée du désert n'aura pas été possible sans toi. Je t'aime plus que tout.

Table des matières

Remerciements	i
Avant-propos	vi
Introduction	1
Problématique	5
Chapitre 1 : Cadre conceptuel	8
Concepts clés	8
Redistribution imparfaite	14
Littérature pertinente	16
Chapitre 2 : Analyse théorique	21
Problème de l'étudiant	21
Statique comparative	28
Impact de la politique sur le bien-être de l'étudiant	29
Problème du gouvernement	31
Chapitre 3 : Simulations	38
Calibration du modèle	38
Environnement d'optimisation	41
Algorithme d'optimisation	44
Résultats	46
Analyse	64
Conclusion	68
Bref survol des apprentissages	68
Ouverture	70

Bibliographie	73
----------------------	-----------

Annexes	78
----------------	-----------

Glossaire des variables.....	78
Fonction croissante et concave.....	79
Prêt et gain d'utilité à la diplomation.....	80
Condition nécessaire à la présence d'un maximum.....	81
Statique comparative dans le problème de l'étudiant	82
Théorème de l'enveloppe	94
Conditions de premier ordre du problème du gouvernement : rawls	96
Conditions de premier ordre du problème du gouvernement : maximisateur de réussite.....	97
Programme informatique python	99

Liste des graphiques

1	Frontière de Pareto	13
2	Distribution des étudiants selon leur type dans l'axe $[0, n]$	34
3	La distribution marginale des salaires horaires en dollars canadiens des étudiants selon une fonction log-normale.....	42
4	Effets des instruments du régime de prêts et bourses sur l'utilité sociale selon une posture utilitariste.....	48
5	Revenu hebdomadaire cumulatif de l'étudiant en fonction du salaire ho- raire - politique utilitariste	51
6	Évolution du temps de l'étudiant lors d'une semaine en fonction du sa- laire horaire - politique utilitariste	52
7	Effets des instruments du régime de prêts et bourses sur l'utilité sociale selon une posture rawlsienne	53
8	L'utilité d'un étudiant selon le salaire et la politique qui l'affecte	54
9	Revenu hebdomadaire cumulatif de l'étudiant en fonction du salaire ho- raire - politique rawlsienne.....	55
10	Évolution du temps de l'étudiant lors d'une semaine en fonction du sa- laire horaire - politique rawlsienne.....	56
11	Effets des instruments du régime de prêts et bourses sur la réussite étu- diant	58
12	Effets d'une augmentation du niveau de bourses sur les trois groupes d'étudiants	60
13	Effet d'une augmentation du niveau de bourses sur la probabilité de réussite du groupe 1	61
14	Revenu cumulatif de l'étudiant en fonction du salaire horaire - politique maximisant la réussite.....	62
15	Évolution du temps de l'étudiant lors d'une semaine en fonction du sa- laire horaire - politique maximisant la réussite	63

16	Illustration d'une fonction concave.....	79
----	--	----

Liste des tableaux

1	Salaire à la seconde période	40
2	Valeurs de différents paramètres exogènes du modèle lors des simulations	44
3	Paramètres des instruments de bourses aux fins de simulations	48
4	Instruments optimaux d'une politique de prêts et bourses selon une perspective utilitariste	50
5	Instruments optimaux d'une politique de prêts et bourses selon une perspective rawlsienne	54
6	Instruments optimaux d'une politique de prêts et bourses selon une perspective de réussite	61

Avant-propos

La démonstration qui suit repose sur une utilisation prononcée des outils mathématiques du calcul différentiel et de l'optimisation. Bien que le formalisme mathématique qui en découle peut apporter de la clarté pour certains, il peut dans la majorité des cas refroidir le lecteur, même le plus motivé. À cet effet, une attention particulière a été mise durant la rédaction à s'assurer que la partie textuelle soit aussi autoportante que possible. En revanche, certaines parties utilisent des équations mathématiques d'un niveau complexe pour le lecteur non-initié. Lorsque cela est fait, j'ai pris le temps de suffisamment développer le sens des formules. Les calculs plus longs et ardu sont tous présents en annexe, ainsi que le programme informatique utilisé pour la simulation.

Résumé

J'explore les caractéristiques d'une politique d'aide financière aux études optimale selon trois postures normatives gouvernementales. En outre, je souhaite connaître le partage optimal entre les prêts et les bourses selon le salaire de l'étudiant durant les études. Pour ce faire, je construis un modèle économique à deux périodes suivant le parcours d'un étudiant à l'enseignement supérieur. Je trouve que l'objectif du gouvernement conditionne largement la structure de la politique optimale. Le prêt est plus efficace que la bourse pour induire un niveau d'étude supérieur. L'étudiant qui doit rembourser son prêt à la fois en cas de réussite et d'échec a avantage à diplômé pour décrocher un plus haut revenu après les études. Cela tient seulement dans la mesure où il existe un gain salarial à la diplomation. Un nombre important de travaux confirme l'existence d'une augmentation salariale positive à la diplomation. La performance accrue des prêts pousse le gouvernement souhaitant maximiser la réussite à se tourner en grande partie vers ceux-ci. Les décideurs rawlsien et utilitariste préfèrent quant à eux un mélange plus équilibré de prêts et bourses.

Abstract

I aim to identify the characteristics an optimal financial aid policy for students under three different normative governmental stances. Moreover, I seek to determine the optimal balance between loans and grants based on the student salary. To do so, I build a two-period economic model following a student's path through higher education. I find that the government's objective shapes the structure of the optimal policy. Loans are more effective than grants at inducing a higher level of study. A student who must repay its loan both in the event of success and failure has an incentive to graduate in order to gain a higher salary. This only holds to the extent of the existence of a salary gain after graduation. A significant body of research confirms the existence of a positive salary increase correlated with graduation. The superior performance of loans pushes

a government seeking to maximize academic success to rely on them to a large extent. Rawlsian and utilitarian policymakers, for their part, prefer a more balanced mix of loans and grants.

Introduction

Les études universitaires au Québec sont financées, dans une large partie, par les fonds publics. Les étudiants doivent néanmoins payer des droits de scolarité. Le gouvernement québécois, à l'aide de sa politique de financement des universités, autorise ces dernières à prélever un montant en frais de scolarité qui diffère selon l'origine de l'étudiant. En plus des dépenses académiques, l'étudiant, lors de ses études, doit se loger, manger et couvrir ses dépenses courantes. En parallèle, il n'est pas toujours possible, voire souhaitable, de travailler pour couvrir les différents coûts des études (Stinebrickner & Stinebrickner, 2003; Darolia, 2014). Dès lors, les étudiants québécois ont largement recours à l'aide financière aux études en vue de financer leur parcours académique (Bouchard St-Amant et al., 2023).

Dans l'ensemble des provinces canadiennes, y compris au Québec, le calcul de l'aide accordée aux étudiants se fonde sur un calcul de besoin financier. Le besoin est déterminé en soustrayant les dépenses admises aux ressources financières de l'étudiant. Les ressources financières dont dispose l'étudiant sont déterminées selon des critères objectifs, comme ses revenus, celui de ses/son parents/conjoint, son lieu de résidence, le nombre d'enfants à charge, etc. Par la suite, la valeur du besoin financier permet d'attribuer au demandeur une aide financière partagée entre une portion de prêts et une portion de bourses (Fortier-Martineau, 2022). C'est précisément cette attribution que le présent mémoire tente d'explorer. Le choix entre le fait d'accorder des prêts ou d'accorder des bourses n'est pas sans conséquence tant sur le plan financier que sur le plan des effets induits ¹. Alors que le prêt endette l'étudiant et l'oblige à le rembourser, la bourse est une aide financière directe sans obligations futures en matière de remboursement. En l'espèce, les étudiants pourraient devenir moins intéressés à poursuivre des études universitaires et à persévérer si cela implique un endettement.

1. L'effet induit consiste en un changement de comportement causé par la mise en place d'une politique publique. Par exemple, l'octroi d'une bourse d'études pourrait avoir pour effet que l'étudiant réduise ses heures de travail comme son besoin financier diminue. Il s'agit d'un effet induit.

Ce faisant, une politique de prêts et bourses octroyant majoritairement des prêts induit un niveau de risque accru comparativement à une politique octroyant des bourses. Une vaste littérature se consacre précisément à l'analyse statistique des effets des prêts et bourses sur l'accès aux études et la réussite (Bouchard St-Amant, 2020).

Mon mémoire explore de manière théorique la question du dosage optimal entre l'octroi de prêts et de bourses à l'intérieur d'un programme d'aide financière aux études. J'entends, par l'analyse théorique, la constitution d'un modèle économique et mathématique. Ce dernier tente d'abord de modéliser les préférences et le comportement d'un étudiant. Celui-ci est cependant contraint par ses revenus de travail, de bourses, et de prêts étudiants. L'objectif est de caractériser les instruments de politique optimaux dans la construction d'un régime de prêts et bourses. Je dois définir d'emblée, deux notions omniprésentes à travers le mémoire. D'abord, il s'agit de la notion d'efficience. L'efficience économique survient lorsqu'il est impossible d'augmenter le bien-être d'une personne sans diminuer celui d'autrui. Il s'agit d'un point de saturation exprimant une situation dans laquelle il n'existe pas de gain de bien-être inexploités. Vilfredo Pareto est celui ayant d'abord formalisé cet état du marché (Pareto, 1909). Ensuite, il y a la notion d'optimalité qui est une notion fondamentale en économie publique. Une politique publique socialement optimale maximise l'efficience et l'équité selon des critères déterminés par une fonction de choix social ² (Hindriks & Myles, 2006). L'objectif du mémoire consiste, notamment, à trouver les paramètres d'une politique d'aide financière optimale selon certains critères de bien-être social. Trois fonctions de choix social sont utilisées. Les premières postures couramment utilisées dans le domaine de l'économie sont les postures utilitariste et rawlsienne. La troisième posture est celle d'un gouvernement souhaitant uniquement maximiser la réussite.

La contribution du mémoire est double. D'abord, il ne semble pas y avoir d'auteur s'étant intéressé à un régime composé à la fois de prêts et de bourses. Certains

2. J'explore ces notions en profondeur dans les chapitres deux et trois.

analysent les instruments séparément (Eckwert & Zilcha, 2014; Cigno & Luporini, 2009). Selon mes recherches, l'utilisation conjointe des prêts et bourses n'a pas été étudiée. Ensuite, les travaux dont le modèle s'approche le plus de mon mémoire n'utilisent pas la simulation numérique dans leurs travaux (Cigno & Luporini, 2009; Rey & Racionero, 2010). À l'inverse, la dernière partie de mon mémoire se consacre à la simulation numérique du modèle à l'intérieur d'un programme informatique. La simulation permet de connaître précisément les valeurs optimales des instruments de la politique. Elle permet également de tester certains des résultats théoriques obtenus à l'aide des mathématiques.

Le mémoire est séparé en trois chapitres. J'introduis d'abord les notions économiques pertinentes au développement du modèle. Un regard attentif se tourne également vers la littérature pertinente sur le sujet. Dans la deuxième partie, je développe le modèle théorique sur deux niveaux, le niveau étudiant et le niveau gouvernemental. Je consacre le dernier chapitre à la simulation et aux résultats qui en découlent. J'y aborde, premièrement, la question de la calibration du modèle mathématique puis de l'algorithme que j'utilise. Je termine en exposant les résultats de la simulation.

Trois résultats émergent de l'analyse. D'abord, l'augmentation des prêts est toujours plus efficace que l'augmentation des bourses pour induire de plus grandes heures d'étude. Ce résultat théorique est illustré par les simulations. Ces dernières suggèrent qu'un gouvernement qui souhaite maximiser la réussite étudiante octroie une quantité importante de prêts et très peu de bourses. Ensuite, les taux de contribution étudiante ³ optimaux sont relativement grands (> 65%). Ces valeurs expriment un souhait du décideur de favoriser l'étude au détriment du travail étudiant. Enfin, mes résultats suggèrent que l'augmentation des bourses augmente toujours plus le bien-être global que l'augmentation des prêts. Or, son caractère coûteux pousse le décideur utilitariste ou rawlsien

3. Taux auquel le niveau de bourses décroît à mesure de l'augmentation du revenu de travail durant les études.

à opter pour un partage équilibré de prêts et bourses dans sa politique optimale. Ce faisant, le gouvernement fournit les liquidités nécessaires aux étudiants, mais limite les coûts totaux du programme. Cela lui permet de ne pas trop hausser les impôts sur le revenu à la seconde période. Cet impôt réduit considérablement l'utilité des diplômés et ainsi la probabilité de réussite.

Problématique

Dans une perspective économique, l'investissement public en enseignement supérieur se justifie de plusieurs manières. Il y a, tout d'abord, l'existence d'externalités fiscales dues aux études supérieures. La réussite des études supérieures amène les gens à décrocher certains types d'emploi qui demandent, habituellement, de hautes qualifications. En moyenne, ces emplois rémunèrent davantage comparativement aux autres emplois dans l'économie. Il s'agit d'une condition vérifiée maintes fois par des économistes (Montmarquette et al., 2021). Le diplômé qui décroche un meilleur salaire doit également payer davantage d'impôts sur le revenu dans un régime d'imposition progressif⁴. Ce sont ces entrées fiscales supplémentaires qui sont désignées comme une externalité pour le gouvernement. Il devient avantageux pour le gouvernement de stimuler l'accès et la diplomation à l'enseignement supérieur pour augmenter les bénéfices fiscaux dans le futur. Dans ce cas, le gouvernement peut souhaiter internaliser les bénéfices futurs au moment présent.

La contrainte à l'emprunt constitue la deuxième justification possible d'un gouvernement souhaitant investir en enseignement supérieur. Il s'agit avant tout d'un problème lié au marché de l'emprunt. Bien qu'il soit possible de donner sa maison (sa voiture) en garantie lors de la contraction d'un prêt hypothécaire (auto), il n'est pas possible de faire de même avec ses études. Ainsi, l'absence de garanties rend ce type de prêt risqué. Cela pousse le marché à moins investir dans l'octroi de prêts étudiants. Conséquemment, le manque de liquidité diminue l'intérêt de poursuivre des études supérieures pour certains étudiants. Ce marché imparfait ne permet pas aux étudiants de faire un choix d'étude à la hauteur de leurs aspirations. Lochner & Monge-Naranjo (2011) montre, dans un contexte de crédit limité, que la dépendance des étudiants aux revenus parentaux augmente dans le temps. Ceci

4. J'entends par une politique d'imposition progressive une politique où le taux d'imposition augmente selon l'augmentation du revenu de l'individu.

suppose soit une contraction du marché de l'emprunt pour les étudiants ou l'aversion de ceux-ci eu égard à l'endettement. Afin d'atténuer le problème de liquidité, le gouvernement peut intervenir à travers une subvention au secteur de l'enseignement supérieur. Cette subvention, au niveau individuel, peut se traduire par des prêts et bourses aux étudiants. À la fois, les externalités et la contrainte d'emprunt tendent à avoir un effet négatif sur le niveau d'investissement personnel (Lawson, 2017).

Les éléments justificatifs qui précèdent concernent le bon fonctionnement du marché des inscriptions en enseignement supérieur. La présence d'externalités et la contrainte d'emprunt font en sorte que les étudiants ne peuvent atteindre le niveau d'étude auquel ils aspirent. Il s'agit du premier jalon d'intervention gouvernemental, soit la correction d'imperfections dans le marché. Le gouvernement peut également vouloir simplement redistribuer, même en l'absence d'imperfection (Hindriks & Myles, 2006). La volonté redistributive nécessite de connaître les préférences économiques et sociales du gouvernement. Les deux éléments qui suivent examinent deux types de postures justifiant l'intervention du gouvernement en enseignement supérieur.

Un gouvernement pourrait être tenté de vouloir exploiter les effets induits de sa politique. Un gouvernement qui souhaite maximiser la diplomation pourrait vouloir que les étudiants consacrent davantage de temps à leurs études. Ce faisant, l'octroi d'une aide financière peut induire l'étudiant à moins travailler pour passer davantage de temps aux études. Cela contribue à augmenter ses chances de réussite. La relation empirique entre les prêts et bourses et la diplomation est explorée dans la littérature empirique à plusieurs reprises. Il existe une relation entre l'octroi de bourses et certains indicateurs de réussites (Dynarski, 2003; Ford et al., 2014; Castleman & Long, 2016; Nguyen et al., 2019). C'est notamment sur la relation entre les instruments de l'aide financière et le niveau d'étude que le présent mémoire entend se pencher. Dans la caractérisation d'un régime d'aide financière optimal, la question de l'interaction entre la politique de prêts et bourses et la diplomation est cruciale.

Enfin, le gouvernement peut être tenté de vouloir *corriger* certaines inégalités de ressources en finançant les études des moins fortunés. Ainsi, il pourrait vouloir accorder davantage de bourses aux étudiants moins fortunés ou même appliquer un taux de contribution étudiante plus élevé. Cela permet de diminuer plus rapidement l'aide financière reçue lorsque le revenu de l'étudiant augmente. Le régime de prêts et bourse qui en découle deviendrait plus redistributif. À ce stade, le niveau de redistribution souhaitable implique une posture normative du gouvernement à l'égard des inégalités.

Chapitre 1 : Cadre conceptuel

Concepts clés

Le modèle théorique développé dans le cadre du mémoire fait appel au cadre d'analyse de l'économie publique. L'économie publique est l'étude de l'efficacité économique et de la distribution de richesse à l'intérieur des politiques économiques du gouvernement. Cette analyse peut être à la fois positiviste ou normative. Elle est positiviste lorsqu'elle explique comment les politiques publiques émergent et lorsqu'elle décrit l'effet des politiques publiques. Elle devient normative si elle s'emploie plutôt à déterminer ce que le gouvernement doit faire (Hindriks & Myles, 2006). La différence est mince, mais s'inscrit plus simplement dans la distinction entre l'expression « ce qui est » et « ce qui doit être » (Stiglitz, 2015, p. 19). L'analyse dans ce mémoire se situe dans la catégorie normative, puisqu'il est question de trouver une allocation optimale (« ce qui doit être ») de l'aide financière du gouvernement. L'analyse normative suppose que nous connaissons les objectifs finaux du gouvernement (Hindriks & Myles, 2006). La connaissance de ces objectifs permet de choisir la manière dont le gouvernement souhaite intervenir dans l'économie.

L'analyse théorique implique d'abord l'utilisation d'une modélisation économique. Ce modèle caractérise les préférences des agents économiques par une fonction d'utilité (bien-être) observable. L'utilité exprime en réalité un niveau de satisfaction dérivé de ses préférences à la consommation et au loisir notamment. Il s'agit bien entendu d'une simplification de la réalité qui permet de mettre en lumière la prise de décision des agents économiques. Ces agents sont les étudiants dans mon analyse. Ces derniers ont une fonction d'utilité, mais sont dotés de ressources limitées (salaire, bourses et prêts). L'objectif de l'étudiant, à terme, consiste à maximiser son utilité (bien-être) en fonction de paramètres de la politique et de son salaire. Le gouvernement, de son côté, tient compte des préférences des étudiants. Il s'emploie à maximiser une fonction du

bien-être social ⁵ de l'économie. Les leviers, dont il dispose pour agir sur le bien-être, sont les prêts, les bourses, le taux de contribution étudiante et le taux d'imposition du revenu du diplômé au terme des études supérieures. Il doit également tenir compte de l'effet induit de ses politiques sur le choix de l'étudiant.

La construction du modèle s'effectue en deux temps. D'abord, il faut trouver le choix optimal de l'étudiant compte tenu de la politique de prêts et bourses. Il s'agit du point où l'ensemble des agents économiques maximise leur bien-être tout en étant limité à une contrainte budgétaire. D'un point de vue mathématique, on écrit que l'étudiant s'emploie à maximiser sa fonction d'utilité :

$$\max_{c_i, a_i, e_i} U(c_i, a_i, e_i) \quad \forall i \in [1, N] \quad (1)$$

où l'étudiant i obtient de l'utilité des choix qu'il fait eu égard à certaines variables qui sont endogènes. L'endogénéité d'une variable peut être comprise comme étant une variable sur laquelle l'étudiant jouit d'un levier d'action. Dans mon modèle, il s'agit de sa consommation c , du loisir a et de l'effort e . Il peut ainsi prendre la décision d'ajuster sa consommation, ses heures consacrées au loisir et aux études. Celui-ci est également sujet à une contrainte budgétaire :

$$dépenses_i \leq revenus_i. \quad (2)$$

Ses revenus proviennent de son travail, des prêts et des bourses. Ses dépenses proviennent de sa consommation. Les éléments qui constituent la contrainte budgétaire de l'étudiant sont détaillés dans l'analyse théorique. En d'autres mots, l'étudiant choisit un niveau de consommation, de loisir et d'effort qui maximise sa fonction d'utilité. Il est cependant limité par une contrainte budgétaire. Le problème de maximisation mène ensuite à des valeurs optimales pour les variables endogènes désignées par c_i^* , a_i^* et e_{i1}^*

5. Tout au long du mémoire, j'utilise de manière interchangeable les termes *fonction de bien-être social* et *fonction de choix social*.

Ces valeurs optimales dépendent en partie des instruments de la politique de prêts et bourses. Ces derniers sont exogènes à l'étudiant. Je peux ensuite insérer les valeurs optimales dans la fonction d'utilité $U(c_i^*, a_i^*, e_{1i}^*)$. Il s'agit de l'utilité de l'étudiant à l'optimum. Elle est connue sous le vocable d'utilité indirecte (Mas-Colell et al., 1995).

La résolution du problème de l'étudiant mène à l'obtention des quatre conditions de premier ordre (une pour chaque variable endogène et une pour la contrainte budgétaire). Ces conditions caractérisent le comportement de l'étudiant à l'optimum. Elles sont développées plus loin lors de la construction du modèle théorique.

Le premier théorème de l'économie du bien-être stipule qu'un marché en situation de concurrence parfaite dans lequel il n'existe aucune asymétrie d'information entre le gouvernement et les étudiants atteint l'efficacité (Hicks, 1939). Il implique qu'un marché qui rassemble les conditions idéales ne requiert aucune intervention extérieure. La maximisation du bien-être de l'étudiant présente une solution efficiente du point de vue économique tant qu'aucune imperfection n'entrave la réalisation du marché des inscriptions. Cela doit notamment respecter les hypothèses de l'absence d'externalité et de concurrence parfaite. En matière de politique d'aide financière aux études, le choix d'étude efficient est atteint dès lors qu'il n'existe aucune entrave à la pleine réalisation du marché des inscriptions universitaires. Ceci inclut l'absence d'externalité et l'absence d'asymétrie d'information.

En dépit de l'atteinte du choix d'étude efficient, le gouvernement peut tout de même choisir d'intervenir. Il est doté lui-même d'objectifs qu'il souhaite atteindre par l'intermédiaire d'une politique. Depuis sa posture, il observe les paramètres endogènes optimaux des étudiants peut estimer l'utilité indirecte de ces derniers. Il doit maximiser une fonction du bien-être social. La fonction du bien-être social détermine ses préférences pour la redistribution. Elle exprime une fonction du bien-être

de la société. Elle dépend de l'utilité des étudiants ⁶. Le décideur peut ainsi vouloir maximiser la somme du bien-être dans la société (*utilitariste*). Il peut autrement vouloir maximiser le bien-être des plus défavorisés selon une posture *rawlsienne* (Rawls, 2001) ⁷. Par ailleurs, il est également soumis à une contrainte budgétaire. Ses propres variables endogènes (leviers) sont, le niveau de bourses, le niveau de prêts, le taux de contribution étudiante et le taux d'imposition. Les bourses et les prêts représentent des versements du gouvernement vers l'étudiant. Le second transfert se distingue du premier par la nécessité de son remboursement après les études. Le taux de contribution étudiante constitue le premier jalon d'un régime d'aide financière redistributif. Il exprime le taux par rapport auquel l'aide financière diminue lorsque le revenu de travail de l'individu augmente. Enfin, le taux d'imposition touche seulement le diplômé qui doit payer un impôt au terme de ses études. Il s'agit d'un choix personnel. L'impôt sur le diplômé calque d'une certaine façon un régime fiscal progressif dans lequel le taux d'imposition payé augmente avec l'augmentation du revenu de l'individu. Pour faciliter la compréhension, je désigne ces quatre variables sous la lettre t .

Ainsi, le problème du gouvernement s'exprime de la sorte :

$$\max_t W(U_i^*(t)) \forall i \in [1, N], \quad (3)$$

soumis à sa propre contrainte budgétaire,

$$dépenses publiques \leq revenus publics. \quad (4)$$

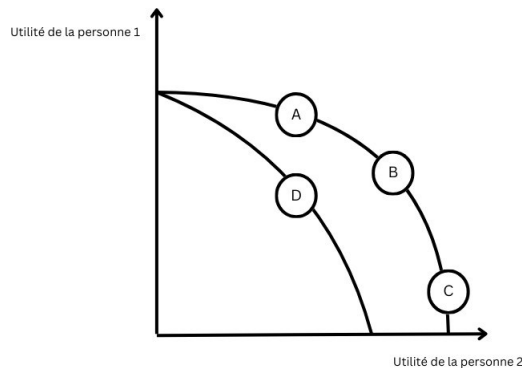
Ici, le gouvernement s'emploie à maximiser le bien-être de l'économie sujet à sa propre contrainte budgétaire. Ce dernier choisit les instruments de sa politique de prêts et bourses t de sorte à maximiser sa fonction du bien-être social. Nous considérons les

6. Je développe plus tard une fonction de choix social dépendant seulement de la probabilité de réussite des étudiants. Cette fonction ne dépend pas de l'utilité des étudiants.

7. Dans le cadre de mon mémoire, la source d'inégalité est exprimée par le taux horaire (salaire) étudiant.

dépenses du gouvernement comme les bourses étudiantes ainsi que les autres dépenses d'éducation non reliées aux prêts et bourses. Cette dernière catégorie de dépenses inclut les dépenses de fonctionnement de l'enseignement supérieur, comme les subventions directes aux universités. Dans ce cadre-ci, les revenus sont quant à eux constitués des revenus d'imposition et de la contribution étudiante. La forme de la fonction du bien-être social est déterminante dans la caractérisation de la solution optimale. Une fonction du bien-être social qui valorise le bien-être des moins favorisés est susceptible de proposer une politique avec une forte redistribution. Dans ce cas, les bourses et les taux d'imposition pourraient augmenter afin d'augmenter les ressources disponibles des moins favorisés. Cela aurait pour effet de mieux distribuer les ressources financières disponibles chez les étudiants et réduire les inégalités financières. À l'inverse, une fonction du bien-être social utilitariste, se soucie de la redistribution dans la mesure où elle maximise la somme des utilités des étudiants. Le décideur souhaite obtenir la politique qui maximise la satisfaction totale des étudiants. Les deux postures peuvent proposer des avenues différentes en ce qui a trait à la politique des prêts et bourses.

Un gouvernement qui choisit une politique en fonction d'un critère de choix social doit faire face à certains arbitrages. Quelques arbitrages peuvent être illustrés par la frontière des solutions efficientes au sens de Pareto. Supposons un environnement dans lequel deux étudiants évoluent. Ayant comme point de départ des ressources financières et intellectuelles fixes, le graphique suivant exprime la frontière des possibilités de distribution du bien-être dans la société.



GRAPHIQUE 1 – Frontière de Pareto

La courbe sur laquelle les points A, B et C se trouvent exprime les possibilités d'allocations efficientes des ressources. Autrement dit, il s'agit du point où il est impossible d'augmenter le bien-être d'un étudiant sans réduire celui d'autrui. Il n'est pas possible d'aller au-delà de la courbe (à droite). Les solutions à l'intérieur de la courbe comme le point D sont par ailleurs inefficaces, car il est possible d'augmenter le bien-être d'une personne sans en affecter celui d'autrui. Il est possible de partir du point D et augmenter l'utilité de la personne 1 ou la personne 2 sans diminuer celui de l'autre. On pourrait également augmenter simultanément l'utilité des deux personnes partant du point D. Le segment ABC exprime les allocations où il est impossible d'augmenter le bien-être d'un étudiant sans réduire celui de l'autre. Or, le déplacement de A vers B et de B vers C exprime un partage des ressources complètement différent. Alors que l'allocation représentée par le point A accorde davantage de ressources (exemple : plus de bourses) à la personne 1, c'est l'inverse pour le point B. Ainsi, le gouvernement doit trouver une méthode pour arbitrer entre les différentes allocations. La méthode à travers laquelle le gouvernement arbitre entre les différentes allocations est déterminée par sa fonction de choix social W expliqué plus haut. Un gouvernement utilitariste, par exemple, souhaite

maximiser la somme des utilités dans l'économie. Autrement dit, il choisit l'allocation qui maximise cette somme. Autrement, le gouvernement *rawlsien* se préoccupe davantage des étudiants au bas de la distribution du bien-être. Il accorde davantage de poids au bien-être de ces personnes dans la détermination d'une allocation optimale. Cela se traduit par la préférence pour les solutions plus au centre que celles près des axes, puisqu'elle témoigne d'un partage plus équitable des ressources. Un gouvernement de type *rawlsien* accorde, en ce sens, plus de valeur à la redistribution.

Redistribution imparfaite

Pour résumer ce qui précède, la détermination de l'allocation optimale nécessite de connaître la posture éthique qui guide l'action gouvernementale. L'allocation optimale est atteinte à la suite d'une redistribution des ressources. Dans le cas de l'aide financière aux études, les ressources sont les prêts, les bourses, la contribution étudiante et l'imposition. Supposons que le gouvernement veut passer du point d'allocation B au point A sur le graphique 1. Il procéderait à une redistribution de sorte que l'étudiant 2 se verrait amputer une partie de ces ressources pour être allouée à l'étudiant 1. Cette redistribution pourrait passer par la hausse du taux de contribution étudiante. La hausse de la contribution étudiante aurait pour effet de réduire les bourses auxquelles l'étudiant 2 a droit pour se diriger vers l'étudiant 1 qui a accès à moins de ressources financières au départ.

Or, un aspect théorique important à prendre à considération dans la redistribution concerne les effets induits discutés plus tôt. Un étudiant à qui le gouvernement applique un taux de contribution ou une taxe sur le revenu de travail voit le coût de renonciation de travailler augmenter (Hindriks & Myles, 2006). En effet, son revenu ne lui permettant pas d'obtenir autant de prêts et bourses, il pourrait être tenté de travailler moins, puisque le bénéfice marginal de l'heure travaillée n'est plus le même. Ainsi, le fait de travailler moins diminue les revenus totaux dans l'économie. Cela a pour effet de ré-

duire les possibilités d'allocations (déplacement vers le centre de la frontière de Pareto).

Cette situation reflète un problème fondamental de la formulation des politiques publiques : l'arbitrage entre l'efficacité et l'équité. La redistribution, étant imparfaite, génère des distorsions qui ont pour effet d'éloigner la société de la courbe de la pure efficacité. Ainsi, un gouvernement qui souhaite redistribuer à travers sa politique de prêts et bourses doit tenir compte des effets induits de cette dernière. Il doit arbitrer entre la quête de l'efficacité et le niveau d'équité auquel il aspire (Okun, 2015). Cela dépend en grande partie de sa position éthique face aux inégalités représentée par sa fonction du bien-être social. Ainsi, une politique optimale d'aide financière aux études dépend beaucoup de la façon dont une société valorise la redistribution de la richesse. En matière de prêts et bourses, un régime redistributif peut vouloir augmenter le taux de contribution étudiante et le taux d'imposition des diplômés pour accorder davantage de prêts et bourses aux moins fortunés. Or, le gouvernement doit tenir compte de la diminution de l'incitation au travail que cela engendre. Au bout du compte, augmenter l'imposition peut réduire les ressources consacrées aux prêts et bourses pour la population étudiante, toutes choses étant égales par ailleurs.

Cet arbitrage classique de politiques publiques entre l'efficacité et la redistribution intègre une particularité supplémentaire dans l'étude d'un régime de prêts et bourses. L'étudiant qui retransche des heures de travail pour avoir accès à davantage de prêts et bourses pourrait substituer des heures de travail pour des heures d'études (St-Amant & Morin, 2021). Cette substitution « productive » peut être jugée positive dans la mesure où elle génère des externalités positives à long terme. Le gouvernement la considère souhaitable tant que l'étude supplémentaire augmente le taux de réussite et donc l'éducation générale dans la population. Le caractère souhaitable de cette substitution dépend à la fois de ce que le gouvernement souhaite accomplir et de la satisfaction que l'étudiant tire de sa diplomation et de la carrière qui l'attend à terme.

Littérature pertinente

Une riche littérature à la fois théorique et empirique s'intéresse à la question de la subvention optimale en enseignement supérieur. Divers sujets allant du niveau de la subvention optimale (Lawson, 2017; De Fraja, 2002) à l'interaction entre l'imposition et la subvention sont analysés par les chercheurs.

Lawson (2017), montre que la subvention optimale doit tenir compte de l'élasticité prix à l'inscription ⁸. De Fraja (2002), montre qu'une conception utilitariste suggère une politique qui aide davantage les plus intelligents. Elle doit être construite de sorte à augmenter les incitations à étudier pour cette partie de la population. À talents équivalents, deux étudiants provenant de deux classes sociales différentes devraient opter pour le même niveau d'étude. Autrement, on étudie abondamment la subvention optimale conjointement à la taxation (Bovenberg & Jacobs, 2005; Maldonado, 2008; Krueger & Ludwig, 2013; Jacobs, 2013; Findeisen & Sachs, 2016; Jacobs & Yang, 2016; Stantcheva, 2017; Jacobs & Thuemmel, 2022). Bovenberg & Jacobs (2005) suggèrent que les outils de taxation et les subventions touchant les études supérieures devraient fonctionner de concert (*Siamese twin*). Dès lors, les dépenses des particuliers en éducation devraient toutes être déductibles d'impôt.

Les prêts étudiants peuvent également être analysés sous l'angle de l'optimalité. D'abord, le remboursement d'un prêt est toujours optimal lorsqu'il demeure proportionnel au revenu après la diplomation (Gary-Bobo & Trannoy, 2015; Findeisen & Sachs, 2016; Lochner & Monge-Naranjo, 2016; Cigno & Luporini, 2019). Cigno & Luporini (2019) montrent que le prêt étudiant peut réduire le problème de liquidité et ainsi inciter les plus pauvres de la société à s'instruire. Un prêt insuffisant fait en sorte que le niveau d'étude (en nombre d'années d'étude) des personnes plus talentueuses,

8. L'élasticité prix à l'inscription fait ici référence à la variation, en pourcentage, des inscriptions à la suite d'une variation du coût d'inscription en pourcentage.

mais moins fortunées devient équivalent au niveau d'étude des personnes moins talentueuses, mais fortunées. Ce n'est pas souhaitable du point de vue de l'utilité sociale. Les auteurs considèrent uniquement les prêts dans ce cas précis.

L'arbitrage entre l'équité et l'efficacité aide à caractériser les politiques optimales en éducation. Comme mentionné plus haut, le critère d'équité demande une spécification des préférences sociales du décideur. Les préférences sont modélisées par une fonction de choix social. De Fraja (2002) utilise une fonction de choix social utilitariste pour déterminer la politique de financement de l'éducation optimale. Le niveau d'éducation optimal pour un gouvernement utilitariste ne doit pas tenir compte du revenu des parents. La politique de subvention devrait permettre à tous les étudiants avec de hautes habiletés de poursuivre le même niveau d'éducation. Dans le cas de Colas et al. (2021), deux fonctions du bien-être social sont considérées en plus de la fonction utilitariste : une fonction maximisant les entrées fiscales ainsi qu'une fonction égalisant les poids marginaux du bien-être social. Les auteurs montrent que la spécification de la fonction du bien-être a peu d'influence sur la politique optimale, qui devrait être progressive selon le revenu des parents. Il s'agit d'un constat partagé par Jacobs (2013). En revanche, ce dernier suggère que le gouvernement doit tenir compte de l'élasticité prix de la main-d'œuvre qualifiée. Plus l'économie est capable de remplacer les travailleurs qualifiés par des travailleurs non qualifiés, plus la subvention optimale diminue.

L'interaction entre les paramètres d'une politique de prêts et bourses et les heures consacrées aux études et au travail demeure déterminante à travers le mémoire. À ce titre, la littérature empirique soutient que les bourses réduisent généralement les heures travaillées (Evans & Nguyen, 2019; Nguyen et al., 2019). L'effet des prêts sur le temps d'étude est cependant moins clair. (Bouchard St-Amant, 2020). Certains travaux américains influents suggèrent l'existence d'une relation positive entre l'octroi d'aide financière aux études et certains indicateurs de rendement académique (Dynarski, 2003). Spécifiquement, on suggère que l'aide financière augmente le temps moyen passé à

l'université. Renée (s. d.), s'appuyant sur les données d'une expérience naturelle menée au Nouveau-Brunswick, note un effet positif de l'aide financière sur la diplomation au collège communautaire (programmes d'étude de deux ans). En revanche, la chercheuse montre que l'aide financière n'affecte pas la diplomation à l'université.

Bourses vs prêts

La question à laquelle le mémoire souhaite répondre implique d'explorer l'arbitrage entre l'octroi de bourses et l'octroi de prêts. Les bourses, bien que plus coûteuses, réduisent l'endettement étudiant. En revanche, les prêts sont plus abordables, mais augmentent le risque de défaut de paiement ⁹.

À cet effet, trois travaux apportent des résultats contrastés. Eckwert & Zilcha (2014) comparent l'octroi de prêts ou de bourses financées à travers l'impôt sur le revenu. Ils suggèrent que le véhicule de financement optimal dépend du caractère endogène ¹⁰ de la politique d'aide financière. Si cette dernière se montre rigide (exogène), l'octroi de prêt agit davantage sur l'augmentation du capital humain d'une société et sur la réduction des inégalités de revenus que l'octroi de bourses. Si, au contraire, la politique d'aide financière devient souple (le gouvernement possède les leviers nécessaires à sa modification), les bourses surpassent les prêts quant à leurs effets.

À l'instar des travaux tout juste mentionnés, Cigno & Luporini (2009) comparent l'octroi de prêts et l'octroi de bourses (financées par un impôt sur les diplômés) en situation d'aléa moral ¹¹. L'octroi de bourses est au moins aussi bon qu'un système de

9. Je montre à l'intérieur du modèle théorique que le prêt peut induire un plus haut niveau d'effort consacré aux études, dès lors qu'il existe un gain salarial à la diplomation.

10. Selon les auteurs, une politique d'aide financière dite endogène s'exprime par la facilité de mise en place dont elle bénéficie. À l'inverse, une politique exogène est, sur le plan réglementaire, plus rigide et nécessite davantage d'effort pour la modifier. La différence entre les deux provient principalement du fardeau réglementaire qui permet leur modification.

11. Situation dans laquelle, le bailleur de fonds possède une information limitée sur le comportement du particulier (Mas-Colell et al., 1995). Les auteurs comparent ici la politique optimale lorsque l'effort

prêts étudiants pour élever le niveau général de bien-être dans la population lorsque l'effort de l'étudiant n'est pas observable.

Enfin, Rey & Racionero (2010), comparent quatre différents véhicules de financement allant des bourses (financé par l'impôt) aux prêts standards et différents types de prêt à remboursement proportionnel au revenu. Les bourses étudiantes financées par l'ensemble de la société ont pour effet de réduire le bien-être des personnes non étudiantes. Cela a également pour effet d'induire une augmentation « excessive » (p. 108) de la participation aux études supérieures chez les jeunes. L'émission d'un prêt à remboursement proportionnel au revenu suscite un niveau de participation optimal et diminue le coût de l'enseignement supérieur pour l'ensemble de la société.

Comme mentionné précédemment, la contribution du mémoire est double. D'une part, aucun auteur, à ma connaissance, ne s'est intéressé à l'analyse intégrée d'un régime d'aide financière aux études comprenant à la fois des prêts et des bourses. La question du dosage optimal n'a jamais été explorée à ma connaissance. D'autre part, les travaux qui s'apparentent le plus à mon mémoire, comme celui de Cigno & Luporini (2009) et celui de Gary-Bobo & Trannoy (2015) couvrent uniquement l'aspect théorique. Au-delà du volet théorique, le mémoire s'emploie à simuler le modèle à l'intérieur d'un programme informatique. Je vise ainsi à obtenir des résultats concrets en matière de politiques publiques.

Le modèle théorique du mémoire se fonde également sur la modélisation du régime de prêts et bourses faite par St-Amant & Morin (2021). Ils montrent qu'il est possible de modéliser un régime d'aide financière aux études fondé sur les besoins financiers comme un régime d'imposition linéaire du revenu accompagné d'un paiement universel. Ainsi, le taux de contribution étudiante est l'équivalent du taux d'imposition sur le revenu. De

de l'étudiant est observable et lorsqu'elle ne l'est pas. Cette situation d'asymétrie de l'information empêche l'atteinte de la courbe de la pure efficience.

cette façon, l'aide accordée diminue lorsque le revenu augmente, ce qui correspond bien à l'esprit d'un tel programme. La particularité de mon modèle provient de l'intégration des prêts. Cela correspond à un second paiement universel. En revanche, l'obligation de rembourser le prêt au terme des études différencie ce paiement du premier.

Chapitre 2 : Analyse théorique : dosage optimal de prêts et bourses

L'analyse théorique subséquente repose sur la stratégie à deux étapes détaillée dans le cadre conceptuel. L'étudiant commence par choisir son niveau d'étude, de loisir et de consommation en fonction de son taux horaire et des paramètres de la politique de prêts et bourses. Dans un deuxième temps, le décideur public observe l'ensemble des étudiants et choisit la politique qui maximise une fonction de choix social.

Problème de l'étudiant

Trois types d'étudiants sont inclus dans le modèle. Il y a d'abord l'étudiant qui travaille et qui est admissible aux bourses. Il y a l'étudiant qui travaille dont le revenu le rend non admissible à l'obtention de bourses. Enfin, il y a l'étudiant qui décide de ne pas travailler et qui est admissible aux bourses. Tous les étudiants reçoivent la portion du prêt de l'aide financière.

1^{er} cas : L'étudiant qui travaille et admissible à l'obtention de bourses.

On suppose un modèle à deux périodes : $t \in 0, 1$. Lors de la première période, l'étudiant i fréquente l'enseignement supérieur. Il opte pour un niveau d'effort e_{1i} correspondant à une quantité d'heures consacrées aux études, un niveau de consommation c_i exprimé en dollars et son niveau de loisir a_i exprimé en nombre d'heures. Il consacre également le temps résiduel au travail rémunéré l_i . L'étudiant reçoit un prêt d'une valeur égale à M_2 et une bourse. La valeur de la bourse reçue dépend du montant maximal M_1 auquel on soustrait la contribution étudiante. À la deuxième période, l'étudiant a deux possibilités devant lui. Il peut d'abord diplômer. Il décroche ainsi un salaire annuel $\bar{W}$ et paie un impôt sur ce salaire à un taux T . Ses revenus, lors de cette période, sont amputés du remboursement de son prêt étudiant M_2 ¹². La deuxième possibilité est

12. Je fais l'hypothèse que l'étudiant ne paie pas d'intérêt sur son prêt.

celle de l'absence de réussite. En l'occurrence, il ne diplômé pas et reçoit un salaire W (inférieur à $\bar{W}$). Il ne paie pas d'impôt, mais doit également rembourser son prêt étudiant M_2 .

Dans les deux cas, l'étudiant consacre tout son temps à la seconde période au travail rémunéré. Il s'agit d'une hypothèse simplificatrice.

L'étudiant tire de l'utilité à la première période de sa consommation et du loisir. À la seconde période, il acquiert de l'utilité du revenu net dont il dispose. Cette utilité doit également être pondérée par la mesure de la probabilité de réussite $p(e_{1i})$, fonction du niveau d'effort consacré aux études. Si la probabilité de réussite est exprimée par $p(e_{1i})$, celle de l'échec est exprimée par $1 - p(e_{1i})$. Nous pouvons ainsi exprimer l'utilité totale de l'étudiant à l'aide de la fonction suivante :

$$U_i = \overbrace{U_1(c_i, a_i)}^{\text{Utilité à la première période}} + \overbrace{p(e_{1i})U_2((1 - \tau)\bar{W} - M_2)}^{\text{Utilité du diplômé}} + \overbrace{(1 - p(e_{1i}))U_2(W - M_2)}^{\text{Utilité du non-diplômé}}. \quad (5)$$

Ce dernier est également soumis à la contrainte budgétaire suivante :

$$c_i \leq (1 - \tau)wl + M_1 + M_2, \quad (6)$$

où τ est le taux de contribution étudiante dans le calcul de prêts et bourses ¹³. l_i est le nombre d'heures travaillées durant les études. Il peut s'exprimer à l'aide des variables endogènes du modèle $1 - e_{1i} - a_i$. Autrement dit, on suppose que l'étudiant peut soit travailler, soit étudier ou soit passer du temps pour autre chose (loisir). Le chiffre 1 ici indique le temps total durant une semaine typique. Plus tard, je fixe cette valeur à 55

13. Le règlement sur l'aide financière aux études du Québec prévoit que l'aide financière auquel l'étudiant a accès diminue en fonction des revenus qu'il déclare à un taux égal au taux de contribution (τ) (Règlement sur l'aide financière aux études, RLRQ, c A-13.3, r 1).

heures. L'équation (6) exprime que les revenus totaux de l'étudiant (revenus nets du travail, revenus de bourses et revenus de prêts) sont au moins équivalents au niveau de consommation de l'étudiant. La contrainte budgétaire délimite les allocations possibles de consommation, de loisir et d'effort consacré aux études de l'étudiant.

Le modèle suppose que les fonctions d'utilité $U_1(c_i, a_i)$, $p(e_i)$ et U_2 sont croissantes et concaves. Cela indique deux choses. D'abord, l'augmentation de la consommation et du loisir augmente toujours l'utilité à la première période. L'augmentation de l'effort consacré aux études augmente aussi toujours la probabilité de réussir. Ensuite, la concavité de telles fonctions indique que l'augmentation de l'utilité devient toujours un peu plus petite à mesure que les valeurs de consommation, de loisir et d'effort augmentent. La représentation graphique d'une telle fonction est présentée en annexe 2. Cette hypothèse a des implications concrètes sur le choix de l'étudiant. Il n'a pas avantage à augmenter l'un d'eux *ad vitam aeternam* comme l'augmentation d'un de ses paramètres endogènes a toujours de moins en moins d'effet sur son utilité totale. L'arbitrage entre les trois paramètres qui en résulte est au cœur du problème de l'étudiant.

Par ailleurs, je fais également l'hypothèse que la fonction d'utilité à la deuxième période U_2 est croissante et concave en l'argument. Comme l'argument de la fonction d'utilité U_2 est le revenu net de l'étudiant après les études, sa croissance exprime que le dollar supplémentaire en revenu net augmente toujours son bien-être. Sa concavité exprime que ce dollar supplémentaire a un effet de plus en plus petit à mesure que le revenu net augmente.

Je joins la fonction d'utilité et la contrainte budgétaire de l'étudiant pour obtenir la fonction de Lagrange suivante ¹⁴ :

14. La méthode du multiplicateur de Lagrange permet d'optimiser la fonction d'utilité de l'étudiant (fonction objective) soumis à une contrainte budgétaire. Le multiplicateur de Lagrange joint les deux fonctions pour en faire qu'une seule. Cela devient ainsi un problème d'optimisation impliquant une

$$\begin{aligned}
L(c_i, e_{1i}, a_i, \lambda) = & U_1(c_i, a_i) + p(e_{1i})U_2((1 - T)\bar{W} - M_2) + \\
& (1 - p(e_{1i}))U_2(W - M_2) + \\
& \lambda_i[(1 - \tau)w(1 - e_{1i} - a_i) + M_1 + M_2 - c_i]. \quad (7)
\end{aligned}$$

Le problème d'optimisation par la méthode de Lagrange introduit la variable lambda (λ_i). Cette dernière traduit la conversion entre la contrainte budgétaire et l'utilité de l'individu (bien-être). Également connu sous le nom du multiplicateur de Lagrange, il exprime la valeur accordée (en utilité) à un dollar supplémentaire.

La condition pour trouver l'optimum d'une fonction exige que les dérivées de la fonction de Lagrange par les variables endogènes soient égales à zéro. Pour l'analogie, si une montagne symbolise la fonction à maximiser, les conditions de premier ordre identifient le sommet de celle-ci. J'obtiens les conditions de premier ordre (CPO) suivantes :

$$\frac{\partial U_1}{\partial c_i} = \lambda_i, \quad (8)$$

$$\frac{\partial U_1}{\partial a_i} = \lambda_i(1 - \tau)w, \quad (9)$$

$$\frac{dp}{de_{1i}} (U_2((1 - T)\bar{W} - M_2) - U_2(W - M_2)) = \lambda_i(1 - \tau)w, \quad (10)$$

$$(1 - \tau)w(1 - e_{1i} - a_i) + M_1 + M_2 = c_i. \quad (11)$$

Les CPO du problème d'optimisation informent sur le comportement de l'utilité et des variables endogènes à la solution optimale, c'est-à-dire lorsque l'étudiant maximise son utilité en tenant compte de ses ressources disponibles. La variation marginale de

seule fonction (Mas-Colell et al., 1995).

l'utilité correspond à la variation du bien-être lorsque l'étudiant ajuste à la marge ses leviers (augmente sa consommation d'un dollar, augmente ses heures consacrées au loisir d'une heure, etc.). Elle est représentée par le côté gauche des équations (8), (9) et (10). Elle est désignée sous le vocable d'utilité marginale. Ainsi, la condition (8) exprime l'utilité marginale à l'augmentation d'un dollar à la consommation. Cette dernière est égale à λ_i . Cela concorde avec la définition du multiplicateur de Lagrange exprimé plus haut. Ensuite, la condition (9) exprime l'utilité marginale à l'ajout d'une heure de loisir. La condition ressemble à la première, à la différence près que l'on doit pondérer la variation de l'utilité avec le salaire net de l'étudiant, après déduction du taux de contribution étudiante $(1 - \tau)w_i$.

La condition (10) exprime, pour sa part, la variation d'utilité de l'étudiant à la suite de l'ajout d'une heure supplémentaire d'études (ou d'effort). On l'exprime avec la fonction $\frac{dp}{de_{1i}}$ et la fonction ΔU_2 ¹⁵. La condition exprime le gain de bien-être lorsque l'étudiant décroche son diplôme. Ce gain d'utilité provient du gain salarial qu'il obtient en allant chercher un emploi mieux rémunéré. À l'instar de l'utilité marginale du loisir, celle de l'effort correspond également à la fonction λ_i , multipliée par le salaire net de l'étudiant $((1 - \tau)w)$. Le constat principal qui ressort des conditions de premier ordre de l'étudiant implique l'arbitrage de l'étudiant expliqué plus haut. Les valeurs de consommation, de loisir et d'effort maximisant son bien-être atteignent un niveau de telle sorte que les bénéfices marginaux d'introduire une unité supplémentaire d'une des trois valeurs est le même pour les trois paramètres. Autrement dit, le point optimal représente le point où l'étudiant est indifférent d'augmenter soit l'un ou l'autre de ses paramètres endogènes.

Enfin, la condition (11) exprime la variation en utilité à la suite d'une variation du paramètre λ_i . Cette condition est, par définition, représentée par la contrainte budgétaire de l'étudiant.

15. Pour fins de simplicité, je désignerai $\Delta U_2 = U_2((1 - T) \bar{W} - M_2) - U_2(W - M_2)$.

2^e cas : L'étudiant qui travaille et non admissible à l'obtention de bourses.

Ce cas implique un étudiant dont le revenu est trop élevé pour demeurer admissible à l'obtention de bourses. Cet étudiant ne reçoit pas de bourses, mais récupère l'entièreté de ses revenus étudiants. Sa fonction d'utilité ne change pas. Sa contrainte budgétaire devient :

$$c_i \leq wI + M_2 \quad . \quad (12)$$

La fonction de Lagrange dans ce cas précis devient :

$$\begin{aligned} L(c_i, e_{1i}, a_i, \lambda) = & U_1(c_i, a_i) + p(e_{1i})U_2((1 - T)\bar{W} - M_2) + \\ & (1 - p(e_{1i}))U_2(W - M_2) + \\ & \lambda_i[w(1 - e_{1i} - a_i) + M_2 - c_i]. \end{aligned} \quad (13)$$

Les CPO deviennent :

$$\frac{\partial U_1}{\partial c_i} = \lambda_i, \quad (14)$$

$$\frac{\partial U_1}{\partial a_i} = \lambda_i w, \quad (15)$$

$$\frac{dp}{de_{1i}} (U_2((1 - T)\bar{W} - M_2) - U_2(W - M_2)) = \lambda_i w, \quad (16)$$

$$w(1 - e_{1i} - a_i) + M_2 = c_i. \quad (17)$$

L'existence du seuil d'admissibilité implique un arbitrage supplémentaire pour l'étudiant. En l'occurrence, l'étudiant qui est sur le point de dépasser le seuil d'admissibilité fait face à deux options. Il peut cesser de travailler et conserver son admissibilité aux bourses. Il peut continuer de travailler et perdre son admissibilité. Pour ce dernier, cela consiste à regarder le bénéfice marginal de l'heure supplémentaire. Il choisit l'option dont le bénéfice marginal est supérieur. Les étudiants qui jouissent de taux horaires plus

élevés perdent davantage à ne pas travailler. Le coût de renonciation de l'heure de travail supplémentaire est plus élevé. Ce faisant, plus l'étudiant jouit d'un taux horaire élevé, plus ce dernier est susceptible de renoncer aux bourses. Il choisit donc de continuer d'augmenter ses revenus par l'intermédiaire du travail.

3^e cas : L'étudiant qui ne travaille pas.

L'étudiant qui ne travaille pas tire ses revenus entièrement du programme de prêts et bourses. Comme il ne travaille pas, l'entièreté de son temps est consacrée aux études et au loisir. Je considère également que son taux horaire est égal à zéro. Dans mon modèle, ces étudiants sont choisis de manière aléatoire dans l'échantillon d'étudiants. Il n'existe donc aucune relation entre le salaire de l'individu et sa probabilité de travailler. J'utilise cet aspect stochastique comme mon cadre théorique ne permet pas d'expliquer la décision de travailler ou de ne pas travailler durant les études. Sa fonction d'utilité ne change pas. Sa contrainte budgétaire se simplifie et devient :

$$c_i \leq M_1 + M_2 \quad . \quad (18)$$

La contrainte ne dépend plus désormais du temps consacré aux études et au loisir. Sa fonction de Lagrange devient plutôt :

$$\begin{aligned} L(c_i, e_{1i}, a_i, \lambda) = & U_1(c_i, a_i) + p(e_{1i})U_2((1 - T)\bar{W} - M_2) + \\ & (1 - p(e_{1i}))U_2(W - M_2) + \\ & \lambda_i[M_1 + M_2 - c_i]. \quad (19) \end{aligned}$$

Les CPO du problème de l'étudiant deviennent :

$$\frac{\partial U_1}{\partial c_i} = \lambda_i, \quad (20)$$

$$\frac{\partial U_1}{\partial a_i} = 0, \quad (21)$$

$$\frac{dp}{de_{1i}} (U_2((1 - T)\bar{W} - M_2) - U_2(W - M_2)) = 0, \quad (22)$$

$$M_1 + M_2 = c_i. \quad (23)$$

Proposition 1 : Le niveau d'étude optimal est plus grand pour un étudiant qui ne travaille pas. Comme le taux horaire est égal à zéro, le côté droit des CPO (21) et (22) deviennent zéro. Cela implique qu'à la solution optimale, la dérivée de l'utilité par rapport au loisir et à l'effort est plus faible que dans les deux premiers cas. Puisque ces fonctions sont concaves, cela veut dire que les niveaux optimaux de loisir et d'effort sont généralement plus élevés pour ce type d'étudiant.

Statique comparative

Ayant déterminé les CPO du problème de l'étudiant, j'analyse le comportement de l'étudiant à l'optimum. Précisément, je souhaite voir comment l'étudiant ajuste ses heures consacrées aux études, son loisir et sa consommation lorsque les variables qui l'affectent (variables exogènes) varient à la marge. Les variables du régime de prêts et bourses et le salaire de l'étudiant constituent les éléments qui lui sont exogènes. Cette analyse est généralement connue par les économistes sous le nom de statique comparative (Mas-Colell et al., 1995).

J'obtiens certains résultats de statique comparative en dérivant les deux côtés des conditions de premier ordre par les variables du régime d'aide financière aux études (respectivement M_1 , M_2 , τ et T). L'ensemble des résultats mathématiques pour les étudiants qui travaillent en demeurant admissibles aux bourses sont explicités dans l'annexe 4.

Proposition 2 : L’octroi d’un dollar supplémentaire en prêt étudiant induit un plus haut niveau d’effort qu’un dollar supplémentaire en bourses pour l’étudiant admissible.

L’augmentation des bourses et des prêts augmente les liquidités de l’étudiant qui travaille et qui est admissible aux bourses. Son besoin financier diminue. Cela le pousse à moins travailler afin de passer plus de temps à étudier ou au loisir. Il s’agit d’un effet de richesse (Mas-Colell et al., 1995). Il existe à la fois dans le cas d’une augmentation de la bourse et celle du prêt. Le prêt étudiant diverge de la bourse par la nécessité de le rembourser à la deuxième période. Le remboursement augmente le risque d’étudier pour l’étudiant. En cas d’échec ou de non-réussite, l’étudiant n’a pas accès au salaire du diplômé, mais doit rembourser le prêt tout de même. L’étudiant choisit d’étudier davantage comme le temps d’étude supplémentaire augmente ses chances de réussite. J’appelle cet effet celui du risque accru. Mathématiquement, je montre l’existence de cette différence en annexe.

Proposition 3 : L’imposition du diplômé à la deuxième période a pour effet de réduire ses heures consacrées aux études.

L’impôt du diplômé diminue son salaire net à la seconde période. L’écart de richesse entre les diplômés et les non-diplômés s’en trouve également réduit. Cette diminution rend les études moins attrayantes pour les étudiants. De plus, lorsque le taux atteint $1 - \frac{w}{w}$, l’étudiant n’a plus aucun intérêt financier à étudier. Il s’agit du taux auquel le revenu net du diplômé équivaut au revenu net du non-diplômé à la seconde période. Dans mon travail de simulation, j’ajoute une limite supérieure équivalente à ce taux pour tenir compte de la proposition. En annexe, je montre que les signes des éléments du numérateur de l’équation (60) sont tous négatifs. Ainsi, le modèle prévoit que les heures d’études diminuent toujours avec l’augmentation de l’impôt sur le diplômé.

Impact de la politique sur le bien-être de l’étudiant

Je souhaite maintenant connaître la relation entre le bien-être de l’étudiant (son utilité) et la variation marginale des instruments de la politique. Dans l’annexe 5, j’aborde en

détail le calcul menant aux différentes expressions mathématiques. Je me contente ici que de les interpréter.

Proposition 4 : L'augmentation de la bourse augmente toujours le bien-être de l'étudiant admissible aux bourses. L'augmentation des bourses accroît les liquidités de l'étudiant. Cette augmentation de son revenu lui permet d'étudier davantage, de consacrer plus de temps au loisir et de consommer davantage. Ce faisant, son utilité s'accroît d'un facteur de λ_i comme l'exprime l'équation (64). Rappelons au passage que λ_i , par définition, exprime la valeur marginale d'un dollar supplémentaire en utilité pour l'étudiant. Ce terme demeure toujours positif.

Pour l'étudiant qui ne travaille pas, l'augmentation des bourses ne change rien à son besoin de travailler, puisqu'il ne travaille pas. En revanche, l'augmentation rehausse son niveau de vie et lui permet de plus consommer.

Proposition 5 : L'augmentation du prêt a toujours moins d'effet sur le bien-être de l'étudiant que la bourse pour ceux y étant admissible. Comme la bourse, le prêt augmente les liquidités de l'étudiant à la première période. Cela augmente son utilité, comme l'exprime le terme λ_i de l'équation (65). En revanche, ce n'est pas le seul effet qui influence le bien-être de l'étudiant. C'est à ce stade que la bourse et le prêt agissent de manière différente sur l'étudiant. Le second doit être remboursé à la deuxième période. Cela influence le bien-être de l'étudiant de deux manières. D'abord, l'augmentation du prêt creuse l'écart d'utilité entre les diplômés et les non-diplômés. Une augmentation du remboursement de 100 \$ pour quelqu'un qui gagne 1000 \$ par semaine n'a pas le même impact que pour quelqu'un qui en gagne seulement 600 \$. Ceci influence l'utilité de l'étudiant dans la mesure où cela augmente l'intérêt d'étudier pour l'étudiant. Cette influence est analogue à l'effet du risque accru présenté dans la section traitant la statique comparative. La seconde manière à travers laquelle l'augmentation du prêt influence le bien-être de l'étudiant provient de la perte sèche d'utilité à la suite

du remboursement. Le remboursement diminue son revenu net sans égard à son statut de réussite. On diminue ainsi son utilité à la seconde période. Je montre en annexe que l'effet net de ces deux éléments est négatif. Ainsi, l'effet total sur le bien-être demeure toujours inférieur à celui de la bourse.

Proposition 6 : L'augmentation de la contribution étudiante diminue toujours l'utilité de l'étudiant qui travaille et admissible aux bourses. Comme tous les éléments de taxation, la contribution étudiante diminue le revenu net de l'individu. Contrairement à la bourse, l'augmentation de ce taux diminue ses revenus, diminuant ainsi sa capacité à étudier ou à consommer. L'effet sur le bien-être, montré à l'équation (66) est négatif.

Proposition 7 : L'augmentation du taux d'imposition du diplômé diminue l'utilité de l'étudiant. L'augmentation du taux d'imposition du diplômé diminue son revenu à la seconde période. Ce faisant, son utilité diminue également, comme je le montre à l'équation (67).

Problème du gouvernement

En guise de rappel, le gouvernement perçoit les préférences des étudiants et leurs choix d'effort de loisir et de consommation. Il est également bienveillant et souhaite maximiser une fonction du bien-être social sujette aux éléments du problème de l'étudiant. Il observe le choix des étudiants. Il ne peut directement agir sur ces éléments. Il ne pourrait, par exemple, obliger directement un étudiant à étudier une heure de plus. Il peut toutefois ajuster les instruments de la politique de prêts et bourses en vue de maximiser le bien-être social. Le bien-être social est défini de trois façons distinctes. Il y a une fonction utilitariste, une fonction rawlsienne et une fonction maximisant la réussite académique.

Utilitarisme

Un gouvernement utilitariste souhaite maximiser la somme des utilités des étudiants.

Le gouvernement maximise la fonction suivante :

$$W = \sum_{i=1}^n (U_1(c_i^*, a_i^*) + p(e_{1i}^*) U_2((1 - T)\bar{W} - M_2) + (1 - p(e_{1i}^*)) U_2(W - M_2)) \quad (24)$$

soumis à la contrainte budgétaire suivante :

$$\sum_{i=1}^n (p(e_{1i}^*) T \bar{W} + (1 - \tau) w_i (1 - e_{1i}^* - a_i^*)) \geq G + \sum_{i=1}^n M_{1i}. \quad (25)$$

L'équation de la fonction de choix social traduit la sommation des utilités indirectes des étudiants. La contrainte budgétaire délimite les capacités d'intervention du gouvernement. En l'occurrence, les dépenses en bourses et les dépenses diverses (G) ne peuvent pas excéder les revenus tirés de l'imposition et de la contribution étudiante. G équivaut aux dépenses du gouvernement non attribuables au programme de prêts et bourses. Elle est la prérogative du gouvernement, mais je la présume fixe pour le compte de l'analyse. Sa valeur est fixée et expliquée plus tard lors du chapitre sur les simulations. Résoudre ce problème de maximisation requiert toujours de faire appel à une fonction lagrangienne qui rassemble la fonction du bien-être social et la contrainte budgétaire gouvernementale. Elle devient :

$$L_p = \sum_{i=1}^n (U_1(c_i^*, a_i^*) + p(e_{1i}^*) U_2((1 - T)\bar{W} - M_2) + (1 - p(e_{1i}^*)) U_2(W - M_2)) \\ + \Phi \left(\sum_{i=1}^n (p(e_{1i}^*) T \bar{W} + \tau w_i (1 - e_{1i}^* - a_i^*)) - \frac{G}{n} - M_{1i} \right). \quad (26)$$

Le multiplicateur de Lagrange prend désormais la valeur de ϕ . Il révèle la valeur en termes de bien-être social que le gouvernement accorde à un dollar supplémentaire.

De manière analogue au problème de l'étudiant, je dérive les conditions de premier ordre (CPO) du gouvernement. Puisque $U^* = V_i$, j'obtiens :

$$\frac{\sum_{i=1}^n \frac{\partial U_i}{\partial \tau}}{\phi} = - \left[\sum_{i=1}^n \frac{\partial e_{1i}}{\partial \tau} \left(\frac{dp}{de_{1i}} TW - \tau w_i \right) + \frac{\text{Effet mécanique}}{w_i (1 - e_{1i}^* - a_i)} - \frac{\text{Effet induit : loisir}}{\frac{\partial a_i}{\partial \tau} \tau w_i} \right], \quad (27)$$

$$\frac{\sum_{i=1}^n (-p(e_{1i}^*) U'_2 (1 - T) W - M_2) W}{\phi} = - \sum_{i=1}^n \frac{\partial e_{1i}^*}{\partial T} \frac{dp}{de_{1i}} TW - \tau w_i + p(e_{1i}^*) W - \frac{\partial a_i}{\partial T} \tau w_i, \quad (28)$$

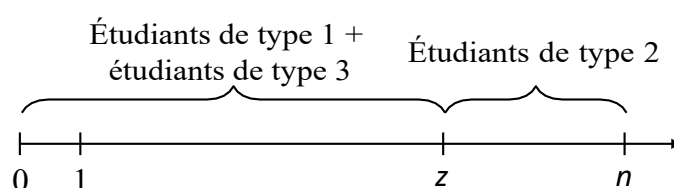
$$\frac{\sum_{i=1}^n \frac{\partial U_i}{\partial M_1}}{\phi} = - \left[\sum_{i=1}^n \frac{\partial e_{1i}}{\partial M_1} \left(\frac{dp}{de_{1i}} TW - \tau w_i \right) - \frac{\partial a_i}{\partial M_1} \tau w_i - 1 \right], \quad (29)$$

$$\frac{\sum_{i=1}^n [\lambda_i^* - U'_2 (W - M_2) + p(e_{1i}^*) \frac{\partial}{\partial M_2} \Delta U_2]}{\phi} = - \sum_{i=1}^n \frac{\partial e_{1i}^*}{\partial M_2} \left(\frac{dp}{de_{1i}} TW - \tau w_i \right) - \frac{\partial a_i}{\partial M_2} \tau w_i, \quad (30)$$

$$\sum_{i=1}^n \left(p(e_{1i}^*) TW - \frac{G}{n} \right) + \sum_{i=1}^n \left(\tau w_i (1 - e_{1i}^* - a_i^*) - M_1 \right) = 0. \quad (31)$$

Dans les équations qui précèdent, je considère une quantité finie de n étudiants qui sont répartis dans les trois types décrits plus tôt. La somme des étudiants de type 1 et 3 correspond à z où $z \leq n$. Il s'agit de tous les étudiants qui sont admissibles aux

bourses incluant ceux qui ne travaillent pas. Je représente la répartition des étudiants dans le graphique 2. Certaines sommes, présentées ci-haut atteignent l'étudiant z au lieu de l'étudiant n . Cela survient lors du calcul de la variation de l'utilité sociale à la suite d'une variation des bourses ou de la contribution étudiante. Je considère dans ce cas uniquement les étudiants qui reçoivent des bourses. Les étudiants de type 2 ne reçoivent pas de bourses en raison d'un revenu trop élevé. Ils demeurent indifférents à l'ajustement de cet instrument.



GRAPHIQUE 2 – Distribution des étudiants selon leur type dans l'axe $[0, n]$.

Il faut voir le seuil d'admissibilité pour l'obtention de bourses comme une variable intégrante de la politique. Il s'agit d'un niveau de revenu au-delà duquel l'étudiant n est plus admissible à l'octroi de bourses. Au lieu de l'intégrer au problème d'optimisation, je choisis de fixer sa valeur, puis de la changer manuellement. Le but est d'analyser la façon dont sa valeur change la politique optimale.

Les variations aux instruments d'une politique de prêts et bourses influencent le bien-être et le budget de trois manières. Ils influencent, d'abord, le bien-être social. Il s'agit du côté gauche des CPO. Par exemple, l'augmentation d'un dollar en prêts aux étudiants (30) augmente le bien-être des étudiants par la quantité $[\lambda^* - U'(\bar{W} - M_2) + p(e^*) \frac{\partial}{\partial M_2} \Delta U_2]$ pour tous les étudiants. Ensuite, le budget est affecté de deux manières.

L'effet mécanique représente le coût direct de l'ajustement à la politique de prêts et bourses. À titre d'exemple, l'effet mécanique d'une augmentation d'un dollar en bourses coûte un dollar de plus par étudiant. Le second effet fait appel à la notion d'effet induit discuté plus tôt. L'augmentation du montant de bourses ne coûte pas seulement

le montant de l'effet mécanique. Les étudiants ajustent leur engagement face à leurs études et à leur travail selon la politique de prêts et bourses. C'est ce qui est discuté lors de la statique comparative. Cet ajustement a des répercussions fiscales indirectes. Si l'étudiant reçoit un dollar supplémentaire en bourses, il décide de réduire ses heures travaillées et d'augmenter ses heures consacrées aux études. Son revenu de travail diminue et la valeur de la bourse augmente. Cela a un impact net sur le coût de la mesure. Ce coût doit être ajouté à l'effet mécanique pour connaître le coût total de l'ajustement. Par ailleurs, l'augmentation de ses heures consacrées aux études améliore ses chances de réussite, comme son revenu espéré à la seconde période. Le nouveau revenu augmente également l'impôt qu'il paie. Ces effets induits se retrouvent dans les quatre premières expressions.

Par ailleurs, je dois spécifier que le prêt équation (30) demeure le seul instrument pour lequel il n'y a pas de coût mécanique. Puisqu'il y a absence d'intérêt (hypothèse de départ), le coût d'un prêt pour le gouvernement est seulement indirect. Cela ne signifie pas, en revanche, que l'augmentation du prêt à outrance est souhaitable. D'une part, l'augmentation du prêt diminue l'utilité des individus à la seconde période. Cette diminution réduit l'utilité totale. D'autre part, l'augmentation du prêt induit un plus haut niveau d'effort à l'école et une réduction des heures travaillées durant les études. La contribution étudiante qui dépend des heures travaillées s'en trouve également réduite. L'ensemble des éléments qui précèdent illustre la vaste gamme des considérations dont le gouvernement doit tenir compte lorsqu'il ajuste un programme de prêts et bourses. Non seulement, le programme modifie l'utilité sociale, il influence également les finances de l'État de plusieurs manières. Ces considérations reviennent pour toutes les fonctions de choix social.

Rawlsienne

Le gouvernement peut également avoir une plus grande aversion à l'égard des inégalités. Ce faisant, sa fonction de choix social accorde une plus grande place au bien-être des moins favorisés. La fonction prend la forme suivante :

$$W = \min(U_1^*, U_2^*, U_3^*, \dots, U_n^*) \quad \text{où } n \text{ correspond au nombre d'étudiants} \quad (32)$$

Il s'agit d'une fonction rawlsienne pure. Le gouvernement se soucie que de l'individu ayant le moins d'utilité. La contrainte budgétaire du gouvernement ne change pas de sorte que la fonction de Lagrange à maximiser devient la suivante :

$$L_p = \min(U_1^*, U_2^*, U_3^*, \dots, U_n^*) + \Phi \left(\sum_{i=1}^n (p(e_{1i}^*) T W + \tau w (1 - e_{1i}^* - a_i^*) - \frac{G}{n} + M_{1i}) \right). \quad (33)$$

Les conditions de premier ordre changent uniquement dans la première partie gauche de l'équation. Les CPO du cas utilitariste considèrent la variation du bien-être de l'ensemble des étudiants. Dans le cas présent, le décideur considère uniquement la variation du bien-être du moins favorisé. Les CPO indiquent qu'au maximum, la variation marginale du bien-être du moins favorisé doit équivaloir les variations fiscales multipliées par Φ . Je les présente en annexe 6.

Maximisateur de réussite

Le gouvernement souhaitant maximiser la réussite étudiante sort d'une logique de bien-être pour se concentrer avant tout sur une donnée plus tangible : la diplomation. Le gouvernement observe l'effort et veut ainsi maximiser la somme des probabilités de réussite de l'ensemble des étudiants. La fonction de choix social se simplifie et devient :

$$W = \sum_{i=1}^n (p(e_{1i}^*)) \quad (34)$$

La fonction de Lagrange à maximiser devient la suivante :

$$L_p = \sum_{i=1}^n (p(e^*_i)) + \Phi \left(\sum_{i=1}^n (p(e^*_i)) \bar{L}_i \bar{W} + \tau w (1 - e^*_{1T} - a^*) - \frac{G}{n} + M_{1T} \right). \quad (35)$$

La contrainte budgétaire demeure la même. Le côté gauche des CPO considère ici la variation dans la probabilité de réussite pour tous les étudiants. Auparavant, Φ ou λ symbolisait la valeur en utilité d'un dollar supplémentaire. Pour l'étudiant, il s'agit de sa propre utilité. Pour le décideur, il s'agissait plutôt de l'utilité sociale. Dans ce nouveau cas de figure, Φ indique quelque chose de différent. Il indique la valeur en probabilité de réussite d'un dollar supplémentaire. Les CPO indiquent qu'au maximum, la variation marginale de la somme des probabilités de réussite doit équivaloir les variations fiscales multipliées par Φ . Les CPO sont également explicitées en annexe 7.

Chapitre 3 : Simulations

Au-delà des expressions mathématiques développées précédemment, je souhaite maintenant obtenir des résultats numériques concrets. L'intérêt d'effectuer des simulations est double. Il permet d'abord de quantifier les effets explorés dans la section théorique. Concrètement, je suis en mesure de comparer l'effet des différents instruments sur le bien-être des étudiants ou les heures d'études. Ensuite, les simulations permettent d'établir les valeurs optimales réelles du modèle théorique. Les équations mathématiques ne mènent pas à des expressions explicites des valeurs optimales des prêts, des bourses et des instruments d'imposition. La simulation, au contraire, permet d'approximer ces valeurs optimales s'appuyant sur un algorithme d'optimisation. Le processus de simulation se décline en deux étapes. Je génère un environnement de simulation avec une quantité finie d'étudiants. Chaque étudiant se différencie par un salaire horaire lors des études. Ensuite, le programme informatique trouve la politique optimale à l'aide d'un processus itératif en calculant la solution optimale de chacun des étudiants.

Calibration du modèle

Unités

L'ensemble des unités durant les deux périodes s'expriment en termes hebdomadaires par souci de cohérence. Pour les heures consacrées au loisir, aux études et au travail, je considère une semaine de 55 heures pour toutes les semaines de l'année. Il s'agit d'une contrainte de temps exprimant que la somme des heures consacrées aux trois activités ne peut dépasser 55 heures à la fin de la semaine.

Choix des fonctions

L'utilité de l'individu i à la première période est tirée de sa consommation et du loisir. Les deux fonctions sont exponentielles. Cela donne :

$$U_{1i} = (c_i - c_{min})^\beta a_i^\alpha, \text{ où } \alpha \text{ et } \beta \in [0, 1] \text{ et} \quad (36)$$

La fonction (36) respecte les propriétés de concavité détaillées dans la section du modèle théorique de sorte que $\frac{\partial U}{\partial a_i} > 0$, $\frac{\partial^2 U}{\partial a_i^2} < 0$, $\frac{\partial U}{\partial c_i} > 0$ et $\frac{\partial^2 U}{\partial c_i^2} < 0$ (voir annexe 2). La valeur α de la fonction exprime la préférence relative pour le loisir. La valeur β exprime la préférence pour la consommation. Plus α devient grand, plus l'étudiant tire du bien-être de son loisir. La même chose est vraie pour β et la consommation.

Par ailleurs, la valeur de c_{min} représente quant à elle une contrainte de consommation minimale. Elle fait en sorte que l'étudiant doit consommer au moins un certain montant avant de tirer de l'utilité positive de sa consommation. L'un pourrait interpréter ce paramètre comme un panier de dépense de base. Les dépenses d'alimentation, de logement et des frais divers peuvent y être inclus. Mon modèle considère une consommation de base de 290 \$ par semaine.

L'utilité de l'individu i à la seconde période sera quant à elle exprimée sous la forme suivante :

$$\begin{array}{c} \xrightarrow{\text{S'il diplôme}} \quad \xrightarrow{\text{S'il ne diplôme pas}} \\ U_{2i} = ((1 - T)W - M_2)^\sigma \text{ et } U_{2i} = (W - M_2)^\sigma \end{array} \quad (37)$$

où $0 < \sigma < 1$.

Une fois de plus, la fonction d'utilité respecte les conditions de concavité (voir l'annexe 2). Cependant, la fonction d'utilité de l'étudiant à la seconde période requiert un élément supplémentaire. Je rappelle que la fonction d'utilité est pondérée par la probabilité de réussite. Un étudiant peut soit réussir (1) ou ne pas réussir (0). Il est possible de déterminer une probabilité de réussite tenant compte de la nature discrète de la réussite (0,1). Cette dernière est une fonction de l'effort consacrée aux études e_{1i} .

J'utilise la fonction :

$$p_i(\text{réussite} = 1 | e_{1i}) = 1 - e^{-e_{1i}/20} \quad (38)$$

Il s'agit d'une fonction exponentielle concave et croissante. L'effort augmente toujours la probabilité de réussite, mais son impact diminue progressivement à mesure que l'effort augmente. La fonction est continue pour toutes les valeurs possibles de e_{1i} soit $[0; 55]$. Joint ensemble, les deux parties précédentes forment l'utilité de l'étudiant à la seconde période et deviennent :

$$U_{2i} = (1 - e^{-e_{1i}/20})((1 - T)\bar{W} - M_2)^\sigma + (e^{-e_{1i}/20})(W - M_2)^\sigma \quad (39)$$

Choix de certaines variables

La construction de la fonction d'utilité à la seconde période requiert de trouver des valeurs de salaires pour les diplômés $\bar{W}$ et non-diplômés W . Pour m'arrimer au reste du modèle, je dois trouver des valeurs hebdomadaires. J'utilise les valeurs suivantes :

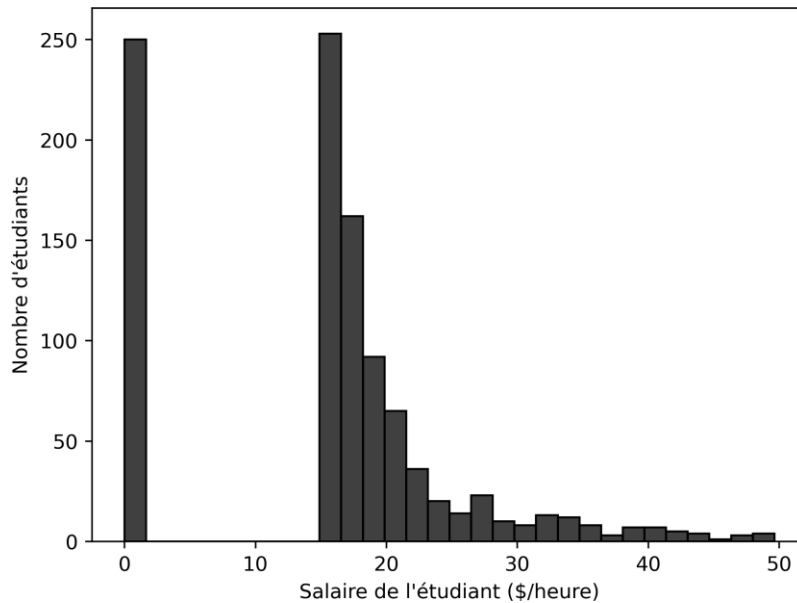
$\underline{W}$	$\bar{W}$
750 \$	1300 \$

TABLE 1 – Salaire à la seconde période.
Source : ISQ (2018).

J'obtiens ces valeurs en dérivant les données d'un rapport statistique de l'Institut de la statistique du Québec sur la condition économique des Québécois en fonction de leur niveau de scolarité.

Environnement d'optimisation

Je souhaite générer une quantité finie d'étudiants qui participe à la simulation. Chacun des étudiants est caractérisé par un salaire de travail lorsqu'il est aux études. J'utilise la librairie *numpy* du langage de programmation *Python* pour générer une distribution de salaires réalistes. Je souhaite générer une distribution aléatoire suivant une fonction de densité de probabilité log-normale. Je pose une limite inférieure au salaire équivalent à 15. Cette limite fait figure de salaire minimum. La distribution utilisée est représentée au graphique 3. Bien entendu, une grande partie des étudiants est dotée d'un salaire équivalent à zéro dollar. Il s'agit des étudiants qui ne travaillent pas. Le ratio d'étudiants qui ne travaillent pas s'élève à 0,25. J'approxime cette valeur en étudiant le comportement des étudiants universitaires sur le marché du travail. J'utilise l'enquête sur la population active (Statistique Canada, 2022a). Plus précisément, j'opte pour les cycles de l'enquête correspondant aux mois durant lesquels les étudiants étudient à temps plein.



GRAPHIQUE 3 – La distribution marginale des salaires horaires en dollars canadiens des étudiants selon une fonction log-normale

Une variable supplémentaire varie à l'intérieur des simulations. Il s'agit du seuil de revenu au-delà duquel l'étudiant n'est plus admissible à l'octroi de bourses. Comme expliqué dans le cadre théorique, l'étudiant qui gagne un revenu de travail supérieur à un seuil n'est plus admissible aux bourses. Il demeure cependant admissible à l'aide financière sous forme de prêt. Le seuil d'admissibilité varie à travers les différentes simulations afin d'observer comment ce seuil fait varier la politique optimale. Une modélisation plus poussée pourrait ajouter ce seuil aux variables endogènes du gouvernement (bourses, prêts, contribution étudiante et impôt). Il s'agit d'un instrument de la politique gouvernementale qui peut être modifiée par le décideur. Pour faciliter l'exécution, je choisis de faire varier manuellement ce seuil à travers mes simulations. Je choisis trois valeurs possibles du seuil. Chaque simulation doit être exécutée trois fois pour chacune des valeurs du seuil. Les valeurs du seuil que j'utilise se situent à 375, 400 et 425 \$ par semaine.

Enfin, le tableau 2 rapporte l'ensemble des valeurs des paramètres exogènes au problème de l'étudiant et au problème du gouvernement. J'y fais d'abord état des variables de puissance contenues dans la fonction d'utilité de l'étudiant. Ces variables, dans le problème de l'étudiant, déterminent comment l'étudiant préfère sa consommation, son loisir et son revenu net à la seconde période. Les valeurs réalistes de l'étude, du loisir et de la consommation doivent orienter la sélection des variables. Ainsi, au Canada, un étudiant passe en moyenne 15 heures à étudier à l'extérieur de ses cours (Uttl, 2024). Pour ce qui est du temps consacré au loisir, il est difficile d'obtenir cette donnée pour les étudiants québécois. En revanche, des données de l'Enquête sur l'emploi du temps de Statistique Canada montrent qu'un individu dans la tranche d'âge d'une étudiante au baccalauréat (15 à 24 ans) consacre 4,5 heures par jour au loisir (Statistique Canada, 2022b). Je parviens à une moyenne de 22,5 heures par semaine consacrée au loisir pour une semaine de cinq jours. Le travail à ce stade-ci consiste à trouver des valeurs de coefficients approximant les heures d'études et de loisir pour obtenir des valeurs réalistes de prêts et bourses. J'y parviens à l'aide d'une méthode par tâtonnement.

Ensuite, pour trouver la valeur des autres types de dépenses par étudiant, j'utilise les données du ministère de l'Enseignement supérieur du Québec ainsi que les données tirées des crédits budgétaires du Secrétariat du Conseil du trésor. Je rappelle que cette valeur correspond aux dépenses publiques en enseignement supérieur qui ne relèvent pas du programme de prêts et bourses. D'abord, j'utilise les crédits totaux octroyés au portefeuille de l'Enseignement supérieur (Gouvernement du Québec, 2022) auxquels je soustrais les dépenses du programme de l'aide financière aux études. Par la suite, j'utilise les effectifs étudiants en équivalence à temps plein (EETPs) québécois. Pour le compte de l'analyse, j'utilise les données de l'année 2022-2023. Je divise le financement total par le nombre d'EETPs, puis je rétablis cette donnée sur une échelle hebdomadaire. J'obtiens ainsi que les dépenses gouvernementales par étudiants (G/n dans mon modèle) est de l'ordre de 300 \$ par étudiant par semaine.

Enfin, j'ajoute le facteur multiplicatif γ à l'utilité à la seconde période. Sans ce facteur, l'étudiant n'accorde pas suffisamment d'importance au futur dans son utilité globale de sorte qu'il n'est pas intéressé à consacrer du temps à étudier. Il souhaite travailler maintenant et passer son temps libre au loisir. À l'ajout du facteur γ , l'étudiant augmente son intérêt pour le futur. Ses heures d'études deviennent plus réalistes.

Variable	Valeur
α (loisir)	0,04
β (consommation)	0,10
σ (revenu à la seconde période)	0,30
γ facteur multiplicatif de l'utilité à la seconde période	11
ratio d'étudiants n'ayant pas d'emploi rémunéré	0,25
G/n (autres types de dépenses en enseignement supérieur)	300 \$

TABLE 2 – Valeurs de différents paramètres exogènes du modèle lors des simulations

Algorithme d'optimisation

La classe d'algorithme utilisée fréquemment dans l'optimisation de problèmes économiques est celle utilisant la méthode du gradient. Plus précisément, l'algorithme dont j'ai recours est celui utilisant la programmation quadratique successive. La logique derrière l'algorithme comporte trois grandes étapes. Je fournis, d'abord, une position initiale à l'algorithme. Il s'agit d'une combinaison de bourses, de prêt, de contribution étudiante et d'impôt. L'algorithme calcule le gradient de la fonction objective à maximiser pour savoir s'il s'agit d'un point optimal ¹⁶. Ici, la fonction représente la fonction d'utilité de l'étudiant. Si ce point ne s'avère pas un optimum, il calcule ensuite une direction de recherche en utilisant une approximation quadratique de la fonction objective. Il parvient, ensuite, à un nouveau point. Finalement, il teste le caractère optimal du point comme à l'étape précédente, puis répète ce processus jusqu'à

¹⁶. Il sied de rappeler la condition nécessaire à un optimum à l'effet que $\frac{\partial L}{\partial x_j} = 0 \quad \forall j$.

l'optimum. Cette méthode a pour avantage d'être précise et relativement rapide. Elle nécessite néanmoins que la fonction objective soit lisse et continue. Elle ne doit pas contenir de discontinuités manifestes. Dès lors, qu'il en existe une, les approximations du gradient et de la matrice Hessienne (approximation quadratique) au point de la discontinuité sont faussées. Comme il ne parvient pas à trouver une direction pour optimiser, il reste bloqué au point de discontinuité et ne peut pas converger vers la solution optimale. L'algorithme fonctionne bien dans le cas du problème de l'étudiant. En revanche, il a plus de difficulté dans le problème du gouvernement.

Une seconde classe d'algorithme peut être utilisée pour parvenir à la solution optimale. Il s'agit des algorithmes de recherche directe. Cet algorithme n'utilise pas le gradient ni la fonction hessienne de la fonction lagrangienne. Il n'est donc pas affecté par les discontinuités dans la fonction. Cet avantage vient cependant avec une augmentation du temps de calcul. Puisqu'il n'est pas capable d'approximer la courbure de la fonction, il procède en quelque sorte de manière aveugle. La résolution du problème du gouvernement utilise l'algorithme de l'évolution différentielle (DE) disponible dans la librairie *scipy.optimize* de *Python*. La spécificité de DE réside dans sa capacité à fonctionner avec un grand nombre de combinaisons simultanées de paramètres endogènes. Son fonctionnement peut se résumer à quatre étapes. D'abord, une quantité finie de combinaisons des variables endogènes est déterminée de manière aléatoire. Pour chacune des combinaisons de la sélection, il forme de nouvelles combinaisons à tester en changeant de manière aléatoire certaines de leurs composantes. Par exemple, l'algorithme peut choisir de changer sa valeur de bourses et sa valeur de contribution étudiante. Dans ce cas, l'algorithme garde inchangées ses valeurs de prêts et du taux d'imposition. Les nouveaux paramètres sont obtenus à l'aide de combinaisons linéaires des autres combinaisons de la sélection (Storn & Price, 1997). Avec les nouvelles combinaisons, l'algorithme compare les nouvelles combinaisons aux anciennes. Une nouvelle combinaison qui améliore la fonction de choix social par rapport à l'ancienne combinaison est conservée. Si ce n'est pas le cas, on la rejette. Enfin, on répète ce

processus jusqu'à ce que l'ensemble des combinaisons convergent vers la solution maximale. Comme son nom l'indique, c'est la théorie de l'évolution qu'il l'inspire. L'algorithme se sert des combinaisons les plus performantes de sa sélection pour converger vers l'optimum.

L'algorithme DE fonctionne à l'aide de trois paramètres déterminants pour son fonctionnement. Il s'agit de la population étudiée (*popsi*), du facteur de multiplication (*mutation*) et de la probabilité de recombinaison (*recombination*). *Popsi* signifie la quantité de combinaison de paramètres endogènes avec laquelle l'algorithme travaille au même moment. Une plus grande valeur augmente la diversité des combinaisons et augmente la robustesse de la simulation. En revanche, elle augmente le temps de calcul. *Mutation* est le facteur multiplicatif utilisé dans la transformation linéaire des combinaisons testées. Il se situe entre zéros et deux. Je dois fournir une étendue (valeur minimum ; valeur maximum) à l'algorithme. Ce dernier choisit une valeur à l'intérieur de l'étendue de manière aléatoire à chaque itération. Plus les valeurs s'approchent de deux, plus l'algorithme parvient à élargir sa recherche dans la plage de recherche. En contrepartie, le temps de calcul se voit augmenté. Enfin, *recombination* est la valeur de probabilité qui détermine la quantité de paramètres endogènes qui récupèrent les valeurs de la nouvelle combinaison. Plus cette valeur est élevée, plus un nombre important de composantes change de valeur. L'augmentation de cette valeur près de un permet à l'algorithme de se déplacer plus aisément, mais augmente le temps de calcul. Dans ma simulation, j'opte pour une valeur de *popsi* de 20, des valeurs de *mutation* dans l'étendue (0,5 ; 1,90) et la valeur de *recombination* à sa valeur de défaut (0,7).

Résultats

L'objectif du mémoire est de connaître les caractéristiques d'une politique de prêts et bourses optimale. Je dois d'abord connaître les prémisses normatives qui guident son action. La présente partie s'emploie à présenter la politique optimale selon trois

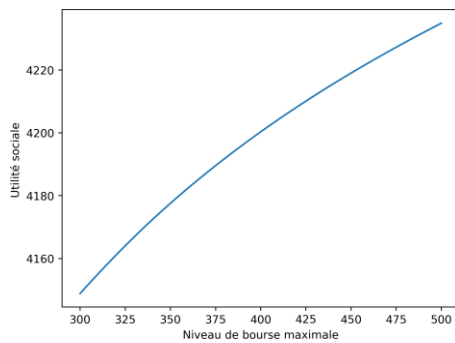
postures normatives : le décideur utilitariste, rawlsien et « maximisateur de réussite ». Alors que les caractéristiques théoriques des politiques optimales sont élaborées plus tôt, les résultats des simulations informatiques permettent de connaître précisément les valeurs d'une politique optimale (selon les paramètres mentionnés dans la partie précédente).

Utilitarisme

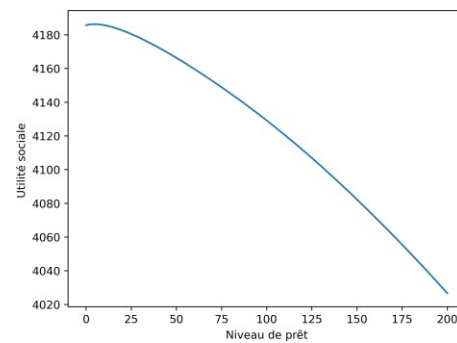
Dans ce cas de figure, le gouvernement maximise la somme des utilités des étudiants sans pondération. Il accorde une valeur à la redistribution de ressources uniquement dans la mesure où cela mène à une plus grande utilité sociale. Je commence par analyser l'effet d'une variation à la politique de prêts et bourses sur le bien-être des étudiants. Je me fonde sur les résultats exprimés aux graphiques 4. Pour ce faire, j'ajuste à la marge les quatre instruments de la politique de prêts et bourses en gardant les autres constants aux valeurs indiquées au tableau 3. Je tiens à spécifier que l'ensemble des points des graphiques ne respecte pas nécessairement la contrainte budgétaire du problème du gouvernement. Les graphiques ne font que rapporter l'utilité sociale. Les valeurs au tableau 3 tentent de reproduire de possibles valeurs du régime d'aide financière québécois. L'aide annuelle maximale s'élevait à 417 \$ par semaine pour l'année 2025. Des valeurs de bourses maximales de 300 \$ et du montant de prêt de 75 \$ s'y approchent suffisamment dans les simulations. Des changements marginaux à ces valeurs ne changent pas la forme des courbes. L'unique condition que je dois respecter concerne le niveau de consommation minimale. La quantité d'aide allouée doit pouvoir subvenir aux besoins financiers d'une personne qui ne travaille pas. Autrement dit, la somme de la bourse et du prêt doit couvrir la consommation minimale. Autrement, le problème d'optimisation de l'étudiant pour les étudiants de type 3 ne pourrait pas fonctionner. L'un pourrait critiquer ce choix, comme le font certaines parties prenantes qui soulignent l'insuffisance du régime d'aide financière québécois (Arcand, 2024). Néanmoins, je juge que la question de la suffisance de l'aide financière est une question distincte de celle de la meilleure allocation abordée dans le mémoire.

Instrument	Valeur
M_1	300,00 \$
M_2	75,00 \$
τ	0,5
T	0,25

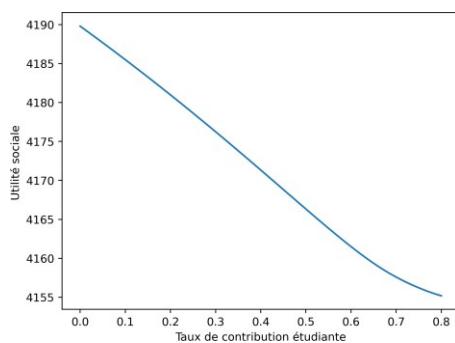
TABLE 3 – Paramètres des instruments de bourses aux fins de simulations



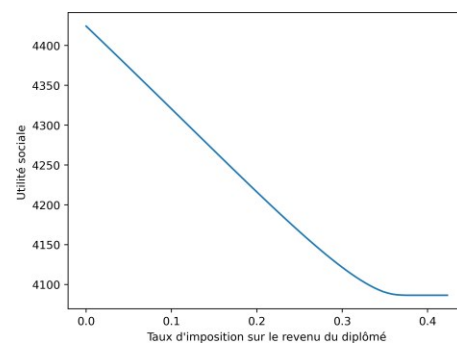
(a) Effet des bourses



(b) Effet des prêts



(c) Effet de la contribution étudiante



(d) Effet de l'imposition

GRAPHIQUE 4 – Effets des instruments du régime de prêts et bourses sur l'utilité sociale selon une posture utilitariste

Considérant que l'utilité sociale sous un calcul utilitariste provient de la somme de l'utilité des individus, j'essaie de comparer les graphiques ci-haut aux résultats de la section théorique. La proposition 4 de la section théorique suggère que l'augmentation du niveau de bourses sous les conditions du modèle augmente l'utilité de l'individu qui en bénéficie. Le graphique 4a abonde dans le sens de la proposition. Ce dernier montre que l'utilité sociale croît toujours, mais est courbée légèrement vers le haut. Cela montre une concavité dans la relation entre les bourses et l'utilité sociale. En guise de rappel, la concavité exprime dans notre cas que la bourse augmente toujours le niveau d'utilité, mais de moins en moins. La proposition 5, quant à elle, veut que l'effet de l'augmentation du prêt étudiant sur l'utilité soit toujours plus petit que l'effet de l'augmentation de la bourse. Le second graphique poursuit dans le même sens. Il confirme néanmoins que la perte d'utilité due à l'endettement surpasse l'augmentation de l'utilité due aux liquidités, puis à l'augmentation de la diplomation. La relation y est même négative. Cela exprime que le prêt diminue tellement l'utilité à la seconde période que l'augmentation des liquidités à la première période ne parvient pas à combler cette diminution. Enfin, les troisième et quatrième graphiques confirment les propositions 6 et 7. L'utilité sociale diminue toujours avec l'augmentation des outils de taxation. En revanche, l'utilité sociale diminue beaucoup plus rapidement avec l'impôt sur le diplômé qu'avec le taux de contribution étudiante.

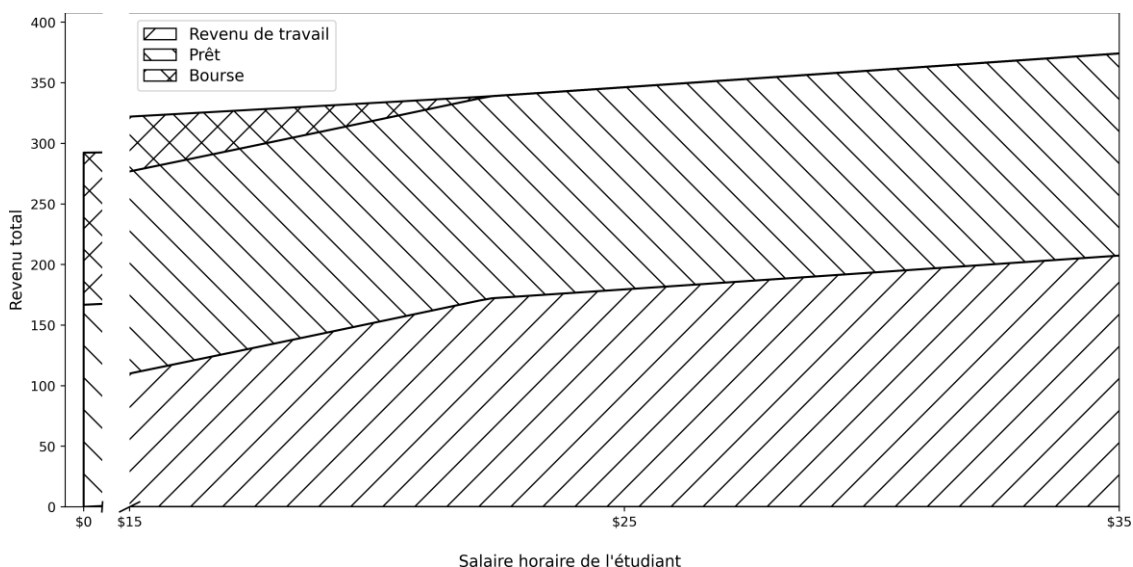
Dans le graphique 4c, l'utilité diminue à mesure que le taux de contribution augmente. Le graphique 4d montre un plancher débutant autour d'un taux d'imposition de 0,4. L'augmentation du taux d'imposition diminue l'utilité jusqu'à ce plancher. Le taux d'imposition n'affecte que le diplômé. Lorsque celui-ci augmente, le bénéfice monétaire de diplômer diminue. La différence entre les revenus nets du diplômé et du non-diplômé se rétrécit. Le début du plancher illustre le moment où le taux atteint un niveau pour lequel, le revenu net du diplômé est égal au revenu net du non-diplômé. À ce niveau, l'étudiant n'a aucun intérêt à étudier d'un point de vue monétaire. L'étude ne lui apporte aucun gain d'utilité futur. Il s'agit du point où l'étudiant n'étudie plus du

tout.

Seuil d'admissibilité aux bourses	Montant de bourses maximal	Montant de prêt	Taux de contribution étudiante	Taux d'imposition du diplômé
375,00 \$	146,24 \$	146,90 \$	73%	24%
400,00 \$	144,88 \$	147,84 \$	73%	23%
425,00 \$	144,88 \$	147,84 \$	73%	23%

TABLE 4 – Instruments optimaux d'une politique de prêts et bourses selon une perspective utilitariste

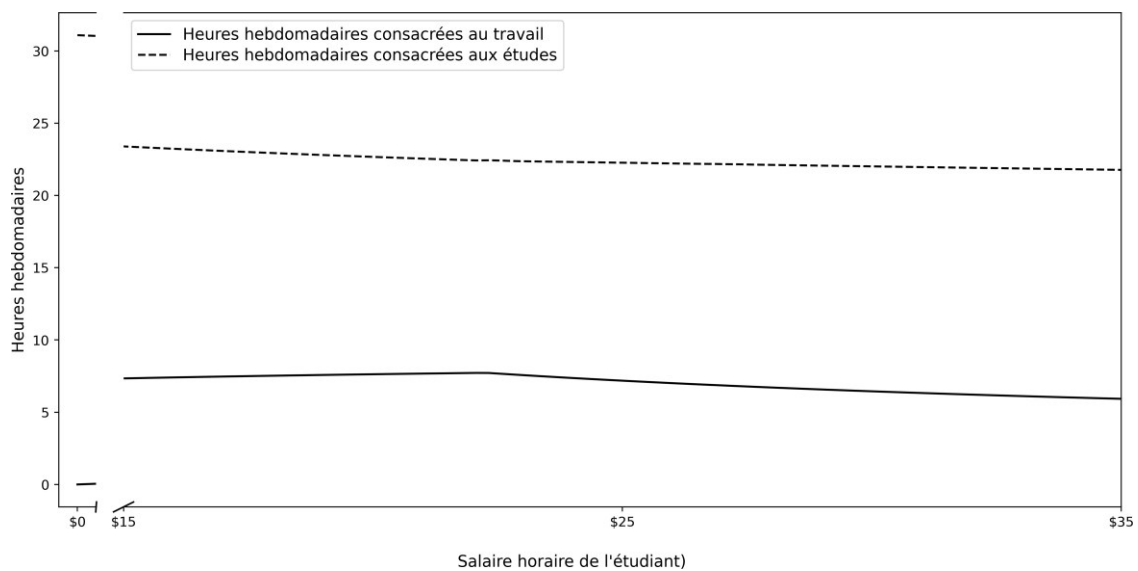
Le décideur utilitariste fournit une aide équilibrée composée majoritairement de prêt. La valeur du prêt et de la bourse optimale tourne autour de 145 \$ par semaine. La somme de ces deux éléments constitue l'entièreté du revenu des étudiants qui ne travaillent pas. Pour ceux qui travaillent, le montant de bourses maximal accordé diminue au rythme de l'augmentation de leur revenu de travail à un taux s'élevant à 73 %. Ainsi, un étudiant doté d'un taux horaire de 15 \$ /heure peut s'attendre à obtenir une bourse hebdomadaire de 50 \$. La valeur du taux de contribution étudiante dépasse largement celle du régime québécois, qui s'élève à 50 %. Le taux marginal d'imposition du diplômé se situe à 22 %. C'est au moyen de cet impôt que le gouvernement finance l'octroi de bourses ainsi que ses dépenses diverses en éducation. Augmenter le seuil d'admissibilité diminue la quantité de bourses octroyée et accroît les prêts.



GRAPHIQUE 5 – Revenu hebdomadaire cumulatif de l'étudiant en fonction du salaire horaire - politique utilitariste

Le graphique 5 présente les sources de revenus d'un étudiant en fonction de son salaire horaire. Celui-ci montre un point de bascule autour d'un salaire horaire de 23 \$. Il s'agit du point où l'étudiant ne reçoit plus de bourses. Tous les étudiants se situant à droite de ce point bénéficient de revenus provenant des prêts et du travail. Néanmoins, leurs revenus augmentent grâce à une augmentation des revenus de travail. Cela finance leur consommation plus élevée. À gauche du point de bascule, il s'agit des étudiants de type 1. Il s'agit des étudiants qui travaillent et qui reçoivent un montant de bourses non nul. Leurs revenus sont constitués majoritairement de prêts et des revenus de travail.

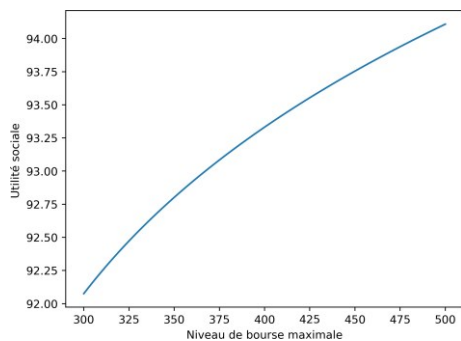
Le graphique 6 montre quant à lui l'allocation du temps de l'étudiant en fonction de son taux horaire. Le point de bascule autour de 23 \$ de l'heure y est encore présent. De manière générale, je constate que les heures consacrées aux études ont une relation négative avec le taux horaire. La variation semble plutôt légère. Sans surprise, les étudiants de type 3 ne travaillent pas par définition et consacrent 30 heures par semaine à leurs études.



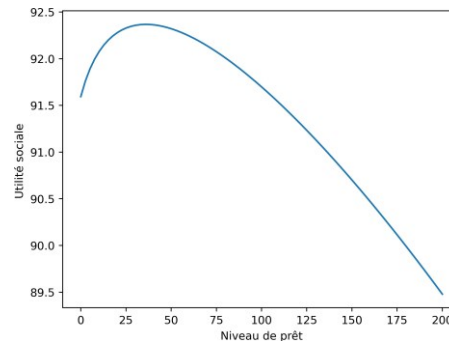
GRAPHIQUE 6 – Évolution du temps de l'étudiant lors d'une semaine en fonction du salaire horaire - politique utilitariste

Rawlsien

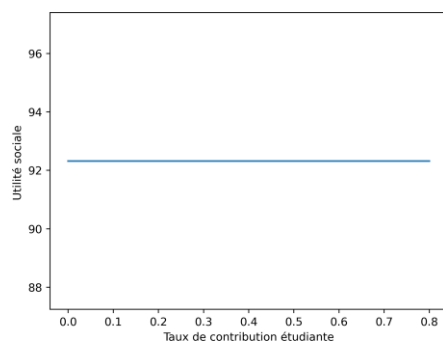
Dans le cas d'une posture rawlsienne, la fonction de choix social considère uniquement l'individu ayant le moins d'utilité de l'ensemble des étudiants. Les graphiques à la figure 7 montrent comment l'utilité de cet étudiant fluctue avec la variation des instruments de prêts et bourses.



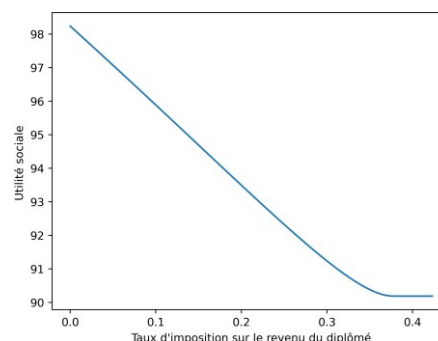
(a) Effet des bourses



(b) Effet des prêts



(c) Effet de la contribution étudiante



(d) Effet de l'imposition

GRAPHIQUE 7 – Effets des instruments du régime de prêts et bourses sur l'utilité sociale selon une posture rawlsienne

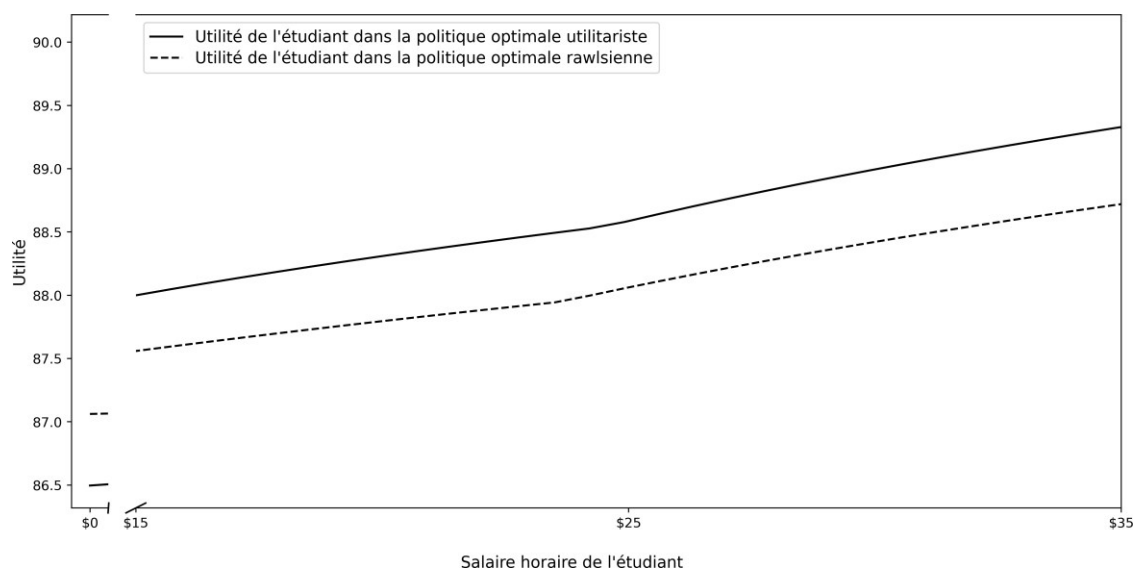
L'étudiant y étant présenté est un étudiant qui ne travaille pas. Ainsi, le graphique montre explicitement que les bourses ont toujours un impact positif sur son utilité. L'impôt diminue toujours son utilité jusqu'au seuil où le revenu du diplômé et celui du non-diplômé sont équivalents. La contribution étudiante ne l'affecte pas comme ses heures travaillées sont nulles. Du côté des prêts, la courbe pointe vers le haut. L'utilité de l'individu croît jusqu'à une quantité de prêts s'élevant à 50 \$ par semaine. L'utilité diminue au-delà de ce point.

Les politiques optimales selon une posture rawlsienne dépendent du seuil de revenu d'admissibilité aux bourses. Les politiques à un seuil d'admissibilité de 400 et 425 \$

Seuil d'admissibilité aux bourses	Montant de bourses maximal	Montant de prêt	Taux de contribution étudiante	Taux d'imposition du diplômé
375,00 \$	117,98 \$	184,68 \$	68%	22%
400,00 \$	114,56 \$	185,56 \$	74%	21%
425,00 \$	114,56 \$	185,56 \$	74%	21%

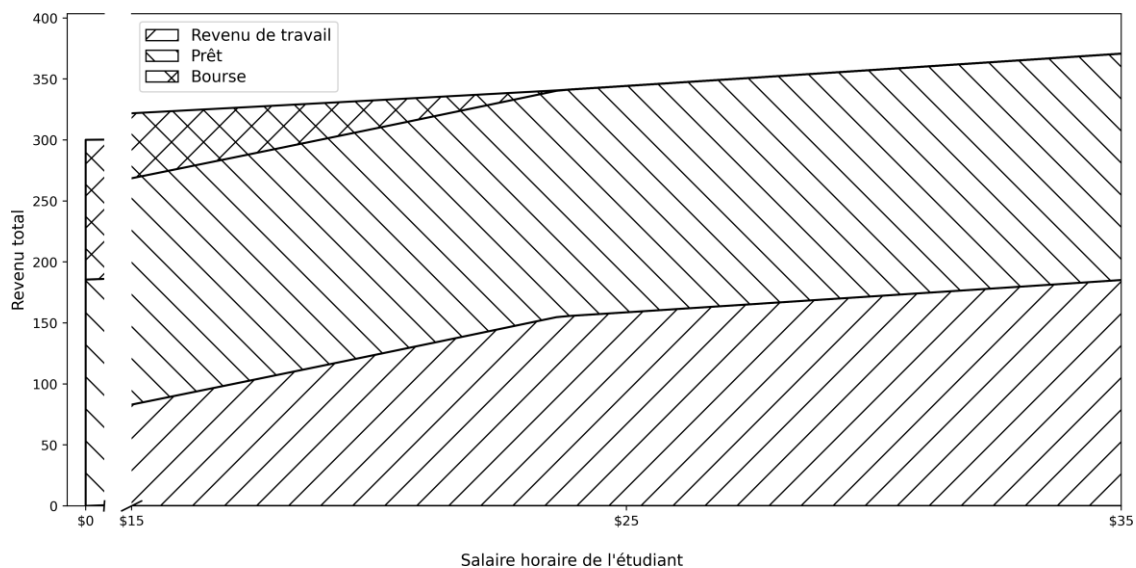
TABLE 5 – Instruments optimaux d'une politique de prêts et bourses selon une perspective rawlsienne

sont identiques. Elles offrent un montant de bourses hebdomadaire et maximal de 114 \$ et un prêt hebdomadaire s'élevant à 185 \$. Les taux de contribution étudiante et d'imposition optimaux frôlent les valeurs du cas utilitariste. La politique optimale au seuil de 375 \$ montre des valeurs de bourses et de prêts optimaux à respectivement 117 et 184 \$. Le taux de contribution y est plus bas. Le taux d'imposition augmente d'un point de pourcentage comparativement aux deux autres seuils. L'aide octroyée sous forme de prêts et bourses est, en moyenne, plus généreuse que dans le cas utilitariste. La somme des deux aides atteint 300 \$. Dans le cas utilitariste, l'aide totale dépasse légèrement 290 \$.



GRAPHIQUE 8 – L'utilité d'un étudiant selon le salaire et la politique qui l'affecte

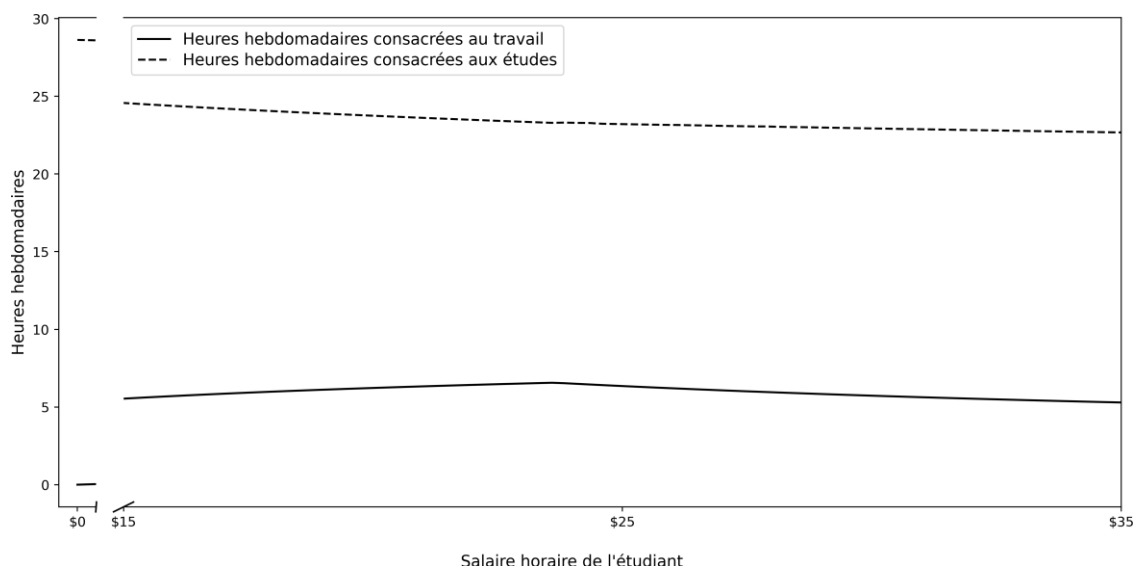
Au chapitre 1, je souligne que le décideur de type rawlsien se soucie davantage de l'utilité de ceux qui en ont moins. Ce dernier demeure plus susceptible de mettre en place une politique qui distribue les ressources de sorte à maximiser leur bien-être. Le graphique 8 montre la « redistribution » d'utilité entre un cas et l'autre. Je compare la distribution de l'utilité dans une politique utilitariste et rawlsienne en fonction du salaire horaire de l'étudiant. Une politique rawlsienne relève le niveau d'utilité des étudiants qui ne travaillent pas. Elle puise dans l'utilité des étudiants de type 1 et de type 2 pour la redistribuer. Concrètement, l'augmentation des prêts avec une réduction des bourses diminue l'utilité des étudiants des groupes 1 et 2. À l'inverse, ce basculement augmente l'utilité des étudiants de type 3. Par ailleurs, la réduction de l'impôt sur le diplômé de quelques points de pourcentage contribue à augmenter l'utilité des étudiants de type 3. Comme ces derniers réussissent davantage, l'impôt sur le diplômé les affecte en plus grande proportion.



GRAPHIQUE 9 – Revenu hebdomadaire cumulatif de l'étudiant en fonction du salaire horaire - politique rawlsienne

Comme l'indique le graphique 10, la politique rawlsienne relève légèrement le niveau d'effort des étudiants qui doivent travailler. L'augmentation du niveau de prêt par

le gouvernement envoie le signal que ce dernier souhaite que les étudiants étudient davantage. Ce faisant, la probabilité que ces étudiants se retrouvent dans une situation d'échec ou d'abandon diminue.



GRAPHIQUE 10 – Évolution du temps de l'étudiant lors d'une semaine en fonction du salaire horaire - politique rawlsienne

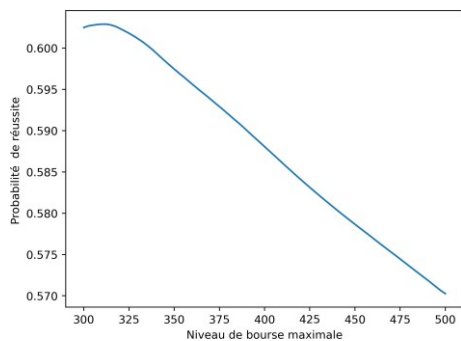
Maximisateur de réussite

Un gouvernement voulant favoriser la réussite maximise la somme des probabilités de réussite de l'ensemble des étudiants. Il doit toujours tenir compte des effets induits. Je regarde d'abord la façon dont une variation des quatre instruments du régime de prêts et bourses induit une variation des heures d'études ¹⁷. La question des effets induits est abordée lors de la section sur la statique comparative. Deux enseignements méritent d'être rappelés. D'abord, un dollar supplémentaire en prêt augmente toujours un peu plus l'effort que le fait un dollar en bourses. Il serait ainsi envisageable qu'une politique maximisant la réussite ait davantage recours aux prêts qu'aux bourses. Enfin, de trop grandes valeurs du taux d'imposition du diplômé ne sont pas souhaitables. À

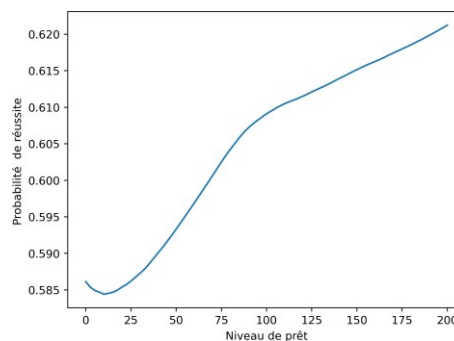
17. Rappelons que le temps d'études est l'unique déterminant de la réussite dans mon modèle.

un taux supérieur à $1 - \frac{w}{w}$, le salaire du non-diplômé excède celui du diplômé. Cela rend les études inutiles d'un strict point de vue monétaire. Ainsi, le taux d'imposition optimal ne dépassera pas ce seuil critique si le gouvernement souhaite que les étudiants étudient davantage.

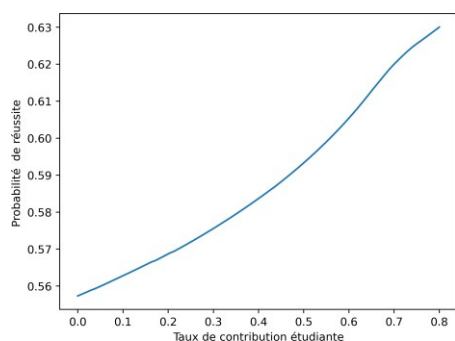
À l'instar des politiques utilitariste et rawlsienne, j'analyse ensuite la variation de la fonction du choix social lorsque les instruments de prêts et bourses varient. En l'occurrence, la fonction du choix social devient la probabilité moyenne de réussite. Je fais varier un paramètre du régime de prêts et bourses à la fois en gardant les trois autres constants. C'est ce qu'illustre le graphique 11. La réussite s'accroît avec l'augmentation des prêts. Les liquidités supplémentaires de l'étudiant réduisent son besoin de travailler. Cet effet semble s'atténuer, au delà d'un certain point demeurant tout de même positif. Cela lui donne la capacité d'étudier davantage et d'améliorer ses chances de réussite. Au sujet de la contribution étudiante, la probabilité de réussite varie positivement avec cette dernière. Du côté du taux d'imposition des diplômés, la probabilité de réussite diminue jusqu'au seuil où le revenu du diplômé équivaut au revenu de celui qui ne diplôme pas.



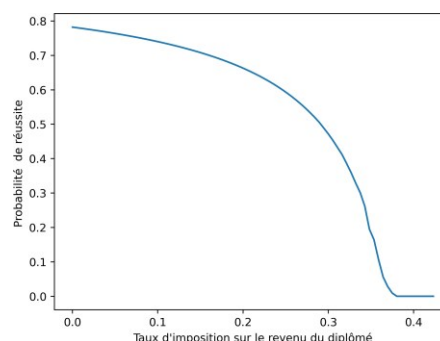
(a) Effet des bourses



(b) Effet des prêts



(c) Effet de la contribution étudiante

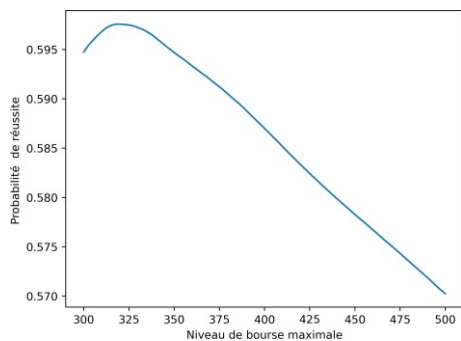


(d) Effet de l'imposition

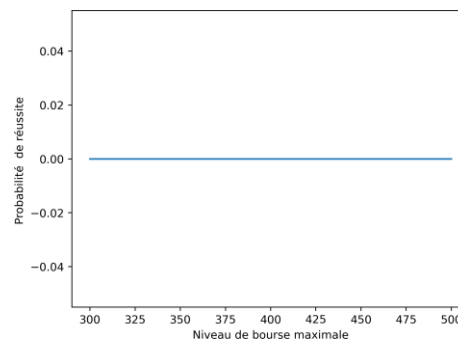
GRAPHIQUE 11 – Effets des instruments du régime de prêts et bourses sur la réussite étudiante

L'effet d'une augmentation des bourses sur la probabilité de réussite semble négatif. Pour comprendre cet effet, il faut voir comment la politique affecte chacun des groupes d'étudiants. Le graphique 12 décompose l'effet d'une augmentation du niveau de bourses pour chacun des groupes d'étudiants. Il indique que les étudiants qui travaillent et qui sont admissibles aux bourses et ceux qui ne travaillent pas réduisent leurs heures consacrées aux études avec une augmentation du niveau de bourses. En contrepartie, les graphiques 12d et 12e montrent une augmentation des heures consacrées au loisir au même moment. Cela suppose une substitution des études vers le loisir. À ce niveau, l'étudiant ne travaille plus, peu importe le groupe auquel il appartient. Il ne peut plus substituer d'heures de travail pour des heures d'études. L'augmentation marginale du

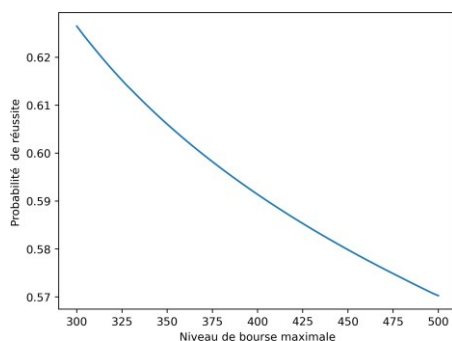
niveau de bourses induit une augmentation du niveau de loisir et une diminution du niveau d'étude. Cet effet n'est pas toujours présent. À des niveaux de bourses plus bas (près des valeurs optimales dans le cas utilitariste et rawlsien), l'augmentation de la bourse induit une augmentation du niveau d'étude. Cette augmentation se déroule au moyen d'une diminution des heures travaillées. La relation positive est montrée au graphique 13.



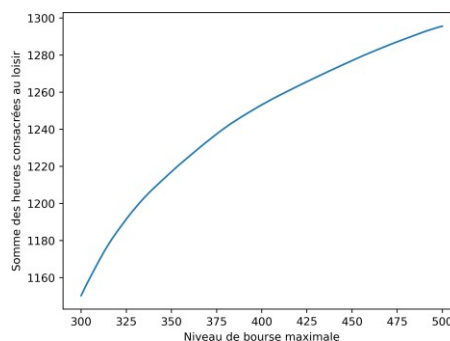
(a) Étudiant de type 1



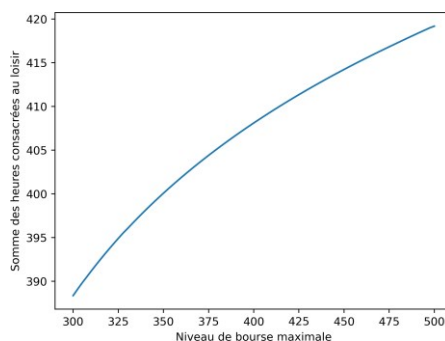
(b) Étudiant de type 2¹⁸



(c) Étudiant de type 3



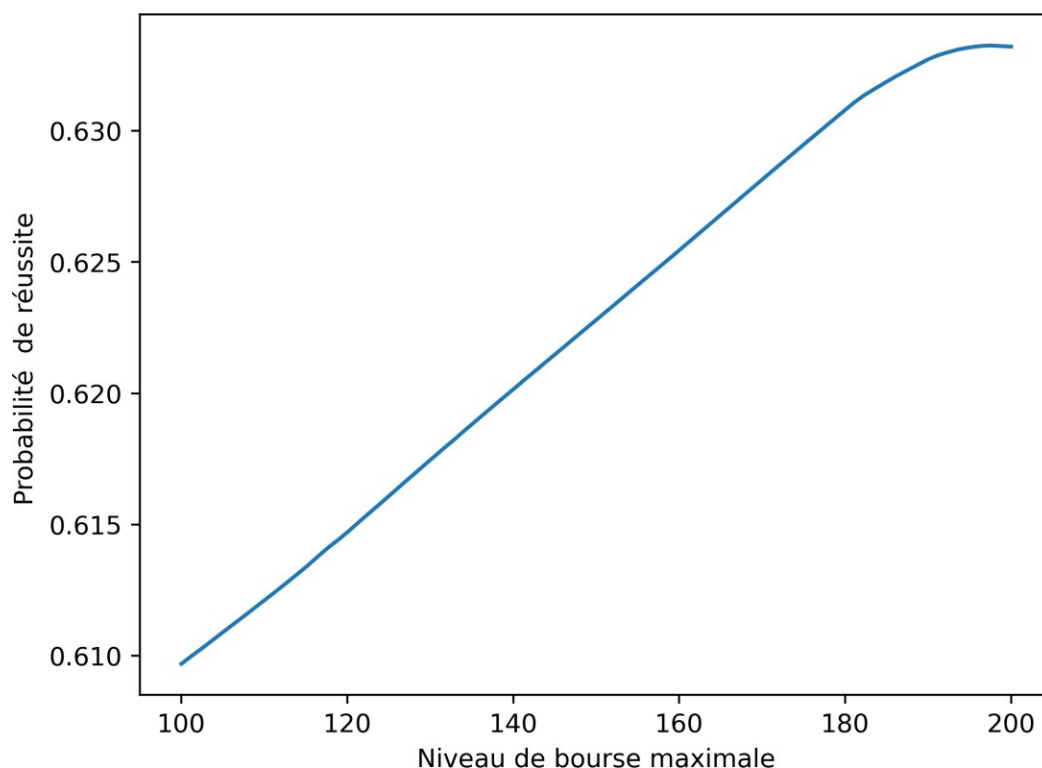
(d) Étudiant de type 1



(e) Étudiant de type 3

GRAPHIQUE 12 – Effets d’une augmentation du niveau de bourses sur les trois groupes d’étudiants

18. La probabilité de réussite moyenne est à zéro puisqu’aucun étudiant n’atteint le niveau du seuil de revenu admissible dans cette politique.



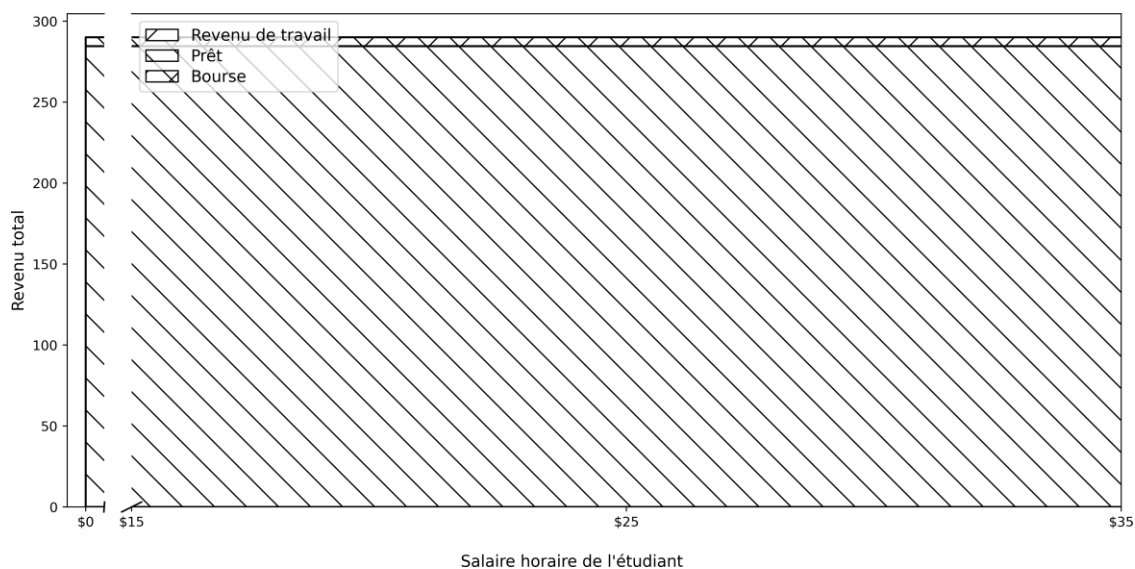
GRAPHIQUE 13 – Effet d’une augmentation du niveau de bourses sur la probabilité de réussite du groupe 1

Seuil d’admissibilité aux bourses	Montant de bourses maximal	Montant de prêt	Taux de contribution étudiante	Taux d’imposition du diplômé
375,00 \$	1,43 \$	288,68 \$	99%	14%
400,00 \$	4,53 \$	285,60 \$	99%	14%
425,00 \$	5,60 \$	284,50 \$	99%	14%

TABLE 6 – Instruments optimaux d’une politique de prêts et bourses selon une perspective de réussite

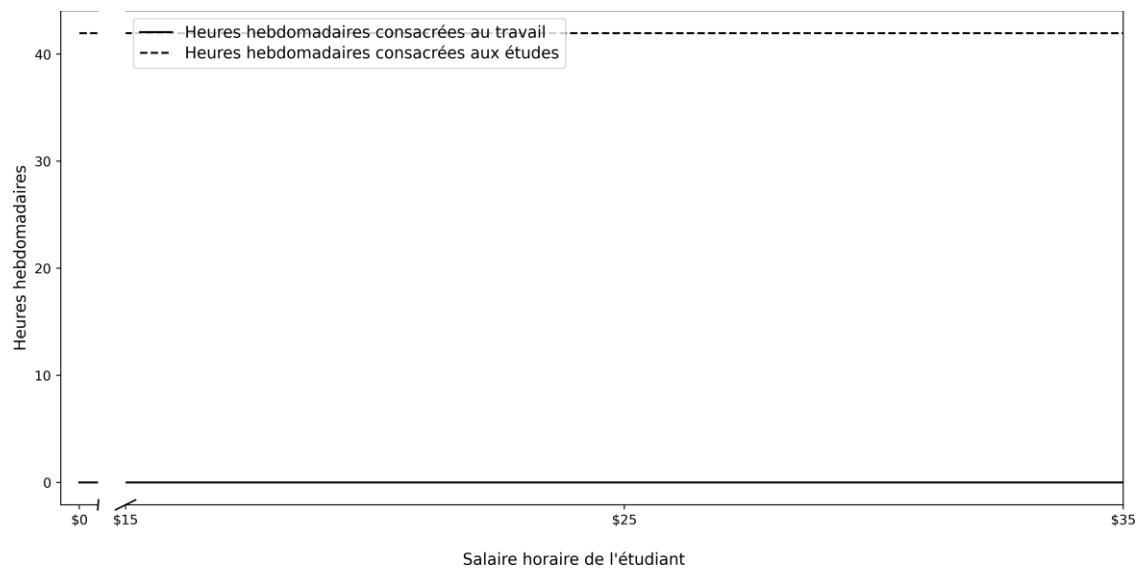
La politique optimale pour un décideur souhaitant maximiser la réussite octroie une très large part de l’aide financière sous forme de prêt. Comme il est mentionné à quelques reprises, l’augmentation du prêt induit un plus haut niveau d’étude qu’une augmentation équivalente de la bourse. L’étudiant étudie davantage pour réduire

les risques de ne pas diplômé. À noter que le seuil d'admissibilité au programme n'a qu'un très faible impact sur la politique optimale. Le taux de contribution étudiante s'approche du 100 %. Le taux d'imposition tourne autour de 15 %. Le taux d'imposition optimale est plus faible que celui des politiques rawlsiennes et utilitaristes.



GRAPHIQUE 14 – Revenu cumulé de l'étudiant en fonction du salaire horaire - politique maximisant la réussite

Du côté des heures consacrées aux études, le régime optimal mène à une homogénéisation du profil des étudiants. Le salaire n'influence plus les choix de l'étudiant. Ce dernier consacre tout son temps au loisir et aux études. Le graphique 15 montre que ses heures d'études hebdomadaires s'élèvent au-delà de la barre des 30 heures. La probabilité de réussite dépasse les 87 %. Le graphique 14 montre quant à lui que la quasi-entièreté du revenu de l'étudiant provient du versement de ses prêts étudiants.



GRAPHIQUE 15 – Évolution du temps de l'étudiant lors d'une semaine en fonction du salaire horaire - politique maximisant la réussite

Analyse

Dans le chapitre précédent, j'esquisse la manière dont la définition des préférences sociales du gouvernement influence la politique optimale de prêts et bourses. Elle modifie la façon dont les ressources sont octroyées entre les différents étudiants. Sur l'axe utilitariste — rawlsien, les politiques tendent à accorder un mélange de prêts et bourses plus équilibré. Le taux de contribution étudiante reste relativement haut dans les deux cas. Cela exprime un souhait du décideur d'encourager l'étude et de diminuer le travail durant les études. Ce dernier souhaite diminuer le risque de l'endettement en maximisant les chances de réussite de l'étudiant. Les dépenses de bourses et diverses sont financées au moyen d'un impôt sur le revenu des diplômés. Les deux types de politiques montrent une relation négative entre le montant de bourses maximal et le seuil d'admissibilité aux bourses. Abaisser le seuil d'admissibilité diminue le nombre d'étudiants admissibles aux bourses. Le gouvernement peut augmenter le montant maximal tout en demeurant à l'intérieur de son cadre budgétaire. Dans la politique rawlsienne, abaisser le seuil à 375 \$ fait même diminuer le taux de contribution étudiante en dessous de 70 %. Un taux plus bas accroît les dépenses. Le montant de bourses diminue plus lentement au fil de l'augmentation des revenus. En bref, plus le seuil d'admissibilité diminue, plus le gouvernement se montre généreux avec ceux admissibles aux bourses.

J'approfondis maintenant quelques résultats obtenus précédemment à travers les trois approches normatives. Un résultat à première vue contre-intuitif est présenté dès les premiers résultats. La quantité de bourses optimale dans une politique rawlsienne est inférieure à la quantité optimale d'une politique utilitariste. L'un peut s'attendre à ce qu'un gouvernement qui s'intéresse au bien-être du moins favorisé lui octroie davantage de bourses. Il faut cependant regarder le programme dans son ensemble. L'augmentation du montant de bourse maximal peut être financée de deux façons. Soit le gouvernement, augmente le taux de contribution étudiante pour réduire le montant octroyé aux étu-

dians qui travaillent. Soit le gouvernement, augmente le taux d'imposition. Le premier taux est relativement élevé (autour de 70 %). Les heures travaillées par les étudiants admissibles aux bourses sont faibles. Ainsi, le montant potentiel pouvant servir à la redistribution est limité. L'imposition du diplômé punit fortement l'utilité à la seconde période du diplômé. Comme les moins favorisées, sont aussi ceux qui réussissent le plus, il n'est pas souhaitable d'augmenter l'impôt. Si le gouvernement souhaite augmenter les ressources disponibles pour l'étudiant moins favorisé, cela passe par les prêts. Le gouvernement augmente son utilité en limitant l'impôt qu'il doit payer à la seconde période.

Dans la politique d'aide financière aux études du Québec, la quantité de prêts qu'un étudiant peut contracter par l'intermédiaire de la politique est limitée par un plafond de prêt. Le plafond de prêt mensuel s'élevait à 321 \$ en 2019 (Fortier-Martineau, 2022). En termes hebdomadaires, l'on parle d'un plafond de 72,43 \$. À ce titre, les résultats de la simulation mènent à des quantités très différentes de prêts. Ce résultat tient pour les trois spécifications de la fonction de choix social. Quelques arbitrages du gouvernement permettent d'expliquer cet état de fait. Les bourses demeurent plus coûteuses que les prêts. Pour augmenter les bourses, le décideur doit augmenter son taux de contribution étudiante ou augmenter l'impôt sur le revenu. Cela étant dit, s'il augmente trop l'impôt, le décideur décourage l'étude, puisqu'il réduit le gain salarial attendu à la seconde période pour les étudiants qui réussissent. Il doit y trouver un juste milieu. Il choisit ainsi d'accorder plus de prêts pour fournir les liquidités à l'étudiant tout en diminuant les coûts directs du programme. Il est vrai que l'augmentation à outrance du prêt ne constitue pas un choix souhaitable pour l'utilité de l'étudiant. Le prêt diminue l'utilité à la seconde période comme il nécessite un remboursement. Or, il affecte négativement les deux groupes d'étudiants, ceux qui réussissent et ceux qui ne réussissent pas. Ces deux groupes doivent rembourser le prêt au terme des études. De surcroît, la nature concave de l'utilité fait en sorte que l'augmentation du prêt diminue davantage l'utilité des non-diplômés que des diplômés. Ce faisant, l'augmentation du prêt ne diminue pas l'intérêt d'étudier et demeure une façon abordable de soutenir financièrement l'étudiant.

Un élément incorporé au modèle théorique le distingue du système fiscal réel du Québec. Je considère une unique source de revenus permettant de financer les dépenses gouvernementales. Il s'agit de l'impôt sur le revenu des diplômés. Aucun autre outil de taxation comme une taxe à la consommation ou un impôt sur les gains en capital n'est utilisé. De plus, les dépenses publiques du Québec sont financées à l'aide des taxes et impôts payés par l'entièreté de la population active. Dans mon modèle, je considère uniquement les individus fréquentant l'enseignement supérieur. L'augmentation de l'assiette fiscale à l'aide des autres sources de revenus évoquées a le potentiel d'augmenter le montant de bourses optimal. Cela accroîtrait l'importance relative du montant de bourses dans l'aide totale.

Le troisième élément d'intérêt pour l'analyse concerne le taux de contribution étudiante. Les valeurs optimales du taux pour les trois postures du décideur demeurent relativement hautes. Il est nécessaire de se rappeler que cette valeur exprime le taux auquel le montant de la bourse diminue au fil de l'augmentation de ses revenus. Dans le cas du mémoire, il s'agit du revenu de travail. Les valeurs du taux de contribution optimal des différentes simulations dépassent largement le 50 % d'exemption des revenus de travail dans le régime d'aide financière québécois. Plus le taux de contribution étudiante croît, plus le montant de bourses diminue rapidement à mesure de l'augmentation du revenu de l'étudiant. Cela réduit le coût direct de la mesure. Une large partie des étudiants bénéficie du montant de bourses maximal. En effet, 25 % des étudiants dans mon modèle ne travaillent pas et touchent au montant maximal de bourses. Ce coût représente une charge importante à supporter pour la société. Le haut taux de contribution étudiante signifie que le gouvernement est limité dans ses moyens financiers et qu'il doit restreindre ses dépenses, y compris les bourses octroyées.

Ce n'est pas la seule raison expliquant la haute valeur du taux de contribution étudiante. L'autre raison concerne la variation de l'utilité sociale. Le taux de contribution

varie négativement avec l'utilité sociale. Plus le taux augmente, plus l'utilité sociale diminue. Inversement, lorsqu'il diminue, l'utilité sociale augmente. Or, la variation du taux de contribution étudiante diminue l'utilité d'un seul groupe d'étudiants sur les trois groupes. Il s'agit du groupe d'étudiants qui travaille et qui est admissible aux bourses. *A contrario*, l'impôt sur le revenu touche à l'utilité espérée de l'ensemble des étudiants. Comme les graphiques d'évolution le montre, elle est plus punitive sur le plan de l'utilité que le taux de contribution étudiante. L'utilisation du taux de contribution étudiante diminue les effets sur l'utilité sociale.

Enfin, l'omniprésence des prêts étudiants à l'intérieur d'une politique maximisant la réussite apporte son lot de considérations. Mon modèle omet de considérer certains effets négatifs de l'accumulation de dettes chez les étudiants. Par exemple, un endettement élevé peut générer un sentiment d'anxiété chez l'étudiant. Cette anxiété peut avoir un impact négatif sur la réussite de l'étudiant (Kim & Chatterjee, 2019; Lindgren et al., 2022). Elle n'est pas captée par la fonction d'utilité de l'étudiant. Dans la perspective d'une politique proposant presque uniquement des prêts, il est important de garder en tête ces possibles écueils. Ainsi, le résultat théorique obtenu à l'intérieur de la simulation doit être regardé dans un contexte plus large. La simulation opérée dans le cadre du mémoire se fonde sur un modèle mathématique ayant ses propres limites. Il a le mérite cependant de fournir des pistes dans la compréhension du rapport entre les outils de taxation, le travail étudiant et l'étude. Par ailleurs, l'absence d'heures travaillées durant les études soulève certaines questions quant à son caractère souhaitable. Le travail durant les études peut s'avérer formateur si bien que les employeurs peuvent s'intéresser à un étudiant qui accumule les expériences parascolaires. Paolo & Matano (2022) montrent, dans un contexte européen, que l'accumulation de compétences dans le cadre d'un travail étudiant améliore les chances de trouver un emploi. Bien entendu, la question de l'employabilité sort du champ de la présente analyse. Elle permet tout de même de nuancer la notion d'optimalité étudiée dans le mémoire.

Conclusion

J'esquisse théoriquement la structure optimale d'une politique d'aide financière aux études. Je considère quatre outils dans la politique : les prêts, les bourses, le taux de contribution étudiante ainsi que l'impôt sur le diplômé. J'ai recours à trois postures normatives guidant l'action gouvernementale. En plus des approches utilitariste et rawlsienne, je développe une nouvelle fonction de choix social visant à maximiser la réussite académique. La structure de la politique optimale dépend des objectifs du décideur. Je m'attarde dans la présente section à rappeler, d'abord, les principaux apprentissages du mémoire. Ensuite, je tâche de placer les conclusions de mon travail dans un contexte plus large énumérant certaines limites et bénéfices de mon approche.

Bref survol des apprentissages

Je souligne au chapitre 1 que l'une des facettes de l'économie publique consiste à déterminer si une politique est souhaitable ou non. Cette position normative guide l'écriture de l'ensemble du mémoire. Bien loin d'un exercice subjectif guidé selon des valeurs personnelles, l'économie publique s'intéresse à la façon dont la posture d'un décideur façonne la politique optimale à laquelle il devrait aspirer. Les résultats de la simulation montrent que la définition des préférences du décideur détermine fortement le choix de structure de l'aide financière optimale. Concrètement, elle détermine la façon dont les ressources publiques sont distribuées. Le décideur utilitariste accorde un partage plus équilibré entre les prêts et bourses. Contrairement à l'intuition initiale, le gouvernement rawlsien n'augmente pas la bourse maximale et le taux de contribution étudiante. Le décideur rawlsien se tourne, pour sa part, plus fortement vers les prêts. Il faut garder en tête que la redistribution orchestrée se fonde sur un critère d'utilité différent d'un critère monétaire. Le gouvernement rawlsien souhaite voir le bien-être du moins nanti augmenter. Il pourrait, dans un cas hypothétique, perdre de l'argent dans le moment présent si cela peut avoir

pour effet d'augmenter son bien-être globalement. C'est ce qui ressort de l'analyse lorsque j'observe une plus grande place des prêts dans l'aide totale. Par ailleurs, la quantité d'aide totale est plus grande. Le niveau d'étude moyen pour l'ensemble des étudiants sous un régime rawlsien dépasse le niveau d'étude sous un régime utilitariste. Un plus haut prêt avec un taux d'imposition plus faible contribue à cette augmentation.

Bien que les politiques rawlsiennes et utilitariste sont largement couverts par les économistes, ce n'est pas le cas de la troisième posture. Le décideur « maximisateur de réussite » se soucie uniquement de la probabilité de réussite. Son souhait se résume à trouver la politique qui permet de hausser les heures d'étude afin de maximiser la réussite. Je relève dans la section réussite qu'une hausse des prêts et du taux de contribution étudiante ont chacune un effet positif sur la réussite. La bourse génère un effet plus ambigu. L'augmentation de l'impôt décourage pour sa part l'étude. Tous ces éléments sont reflétés dans la politique optimale du décideur souhaitant maximiser la réussite.

Au cœur du mémoire se trouve la question de l'arbitrage entre les bourses et les prêts. Les deux véhicules de financement sont évalués séparément dans la littérature (Del Rey & Racionero, 2006). En revanche, la littérature au sujet de l'utilisation simultanée demeure faible. Mes simulations montrent que le prêt réduit l'utilité totale de l'étudiant en raison du remboursement ultérieur. Le recours à cet outil se justifie par les faibles coûts qu'il engendre et l'action positive qu'il exerce sur le niveau d'étude. La bourse de son côté augmente toujours le bien-être. Elle demeure en revanche coûteuse. En outre, un haut niveau d'étudiants qui ne travaillent pas augmente les coûts globaux du programme. Mes résultats contrastent avec ceux obtenus par Eckwert & Zilcha (2014). Une politique dont le choix de la quantité de bourses est endogène (à l'instar de mon modèle) préfère les bourses aux prêts. La distribution des revenus à la seconde période est jugée plus optimale dans leur modèle. Le modèle utilisé par les chercheurs diffère de celui utilisé dans le mémoire. Par exemple, les chercheurs incluent également la

décision de s'inscrire ou non à l'enseignement supérieur. Néanmoins, le prêt étudiant génère, dans mon modèle, un plus haut niveau d'étude et de réussite. Cela augmente les probabilités de toucher à un plus haut revenu. Ce résultat contredit également ceux obtenus par Pernagallo (2024). Ce dernier juge que la dette d'étude affecte le diplômé alors qu'elle n'affecte pas l'étudiant qui ne décroche pas son diplôme.

Les résultats des différentes politiques optimales divergent sur plusieurs points de la politique d'aide financière aux études québécoise. En guise de rappel, le taux de contribution étudiante optimal augmente considérablement par rapport au taux québécois de 50 % (Règlement sur l'aide financière aux études, RLRQ, c A-13.3, r 1). Un haut décourage le travail lors des études. Les valeurs optimales du taux découlant des simulations sont davantage punitives du point de vue du travail. Ensuite, le ratio bourse-prêt s'éloigne du cas québécois. La politique québécoise impose un plafond d'endettement limitant le prêt à une valeur inférieure à 100 \$ par semaine. À l'opposé, les trois politiques optimales offrent des quantités de prêts optimales dépassant largement ce seuil.

Ouverture

Au sein des pays de l'Organisation de coopération et de développement économiques (OCDE), l'aide financière aux études est largement utilisée pour combler les besoins financiers des étudiants (OCDE, 2021). En Allemagne, le montant moyen reçu en bourses d'étude par un étudiant est égal au montant moyen octroyé en prêt. À l'inverse, la Finlande offre des prêts pour un montant équivalent au triple de l'aide financière reçue sous forme de bourses. Ce dosage variable selon les pays mérite de s'y pencher. Je fais état à travers le mémoire d'un grand nombre de considérations diverses dans la mise en place d'un régime d'aide financière aux études. Pour explorer la question du dosage optimal, j'ai eu recours à une modélisation économique et mathématique. Cette approche se bute cependant à plusieurs limites dignes de mention.

D'abord, je ne tiens pas compte du revenu parental. Il est difficile de prévoir les conséquences possibles de l'ajout de cette composante à l'intérieur de mon modèle. Les enseignements des travaux de Colas et al. (2021) laissent croire que l'aide optimale devrait être progressive en fonction du revenu parental. Toutefois, leur analyse ne tient pas compte du travail étudiant. Ensuite, j'ajoute à mon modèle une quantité finie d'étudiants qui ne travaillent pas. Ces étudiants sont tirés dans l'échantillon des salaires par une méthode stochastique. Les étudiants décident de travailler ou de ne pas travailler pour des raisons réelles et tangibles. Mon modèle théorique ne parvient pas à expliquer la décision des étudiants de type 3 de ne pas travailler systématiquement. Cette composante du modèle a le potentiel de déformer le comportement général de l'étudiant.

Ensuite, j'assume que le talent est distribué uniformément à travers les étudiants. Les étudiants ont la même capacité de transformer du temps d'étude en réussite. L'ajout de la composante du talent dans le modèle complexifie le modèle et nécessite d'ajouter une contrainte supplémentaire dans le problème de l'étudiant. Quelques auteurs cités dans la revue de la littérature décident d'ajouter cette composante (Cigno & Luporini, 2009; Gary-Bobo & Trannoy, 2015; Koeniger & Prat, 2017). De Fraja (2002) arrive à la conclusion que l'aide optimale devrait tenir compte des capacités intellectuelles de l'étudiant. Enfin, comme discuté à l'intérieur de la section analyse, mon modèle omet de prendre en considération divers problèmes liés à l'endettement étudiant. Précisément, la littérature relève des conséquences considérables de l'endettement sur la santé mentale et l'humeur générale (Kim & Chatterjee, 2019; Lindgren et al., 2022). La littérature relève également une relation négative entre l'ampleur de la dette étudiante et la probabilité de s'acheter une première propriété (Mezza et al., 2020). Ces facteurs sont susceptibles d'avoir des conséquences sur le bien-être des étudiants et sur leur réussite.

Qui dit modélisation dit simplification. Ses limites importantes viennent d'être élaborées. Cela étant dit, il ne faut pas perdre de vue les avantages de la démarche proposée.

Des mots du célèbre microéconomiste Hal R Varian, la théorie économique permet de conceptualiser et de suivre les coûts et les bénéfices affectant la décision des agents économiques (Varian, 1994). Le mémoire explore largement la question des coûts et des bénéfices. Mon analyse théorique développe les contraintes budgétaires, les fonctions d'utilité, puis dérive les conditions sous-jacentes à la politique optimale (CPO). Ces éléments permettent de saisir ce qui conditionne le choix de l'étudiant et du décideur. L'utilisation des mathématiques rend l'approche plus méthodique et minutieuse. Elle permet de suivre les coûts et les bénéfices même lorsque le modèle se complexifie. En outre, la tentative de quantifier l'utilité et le bien-être permet à l'analyse économique d'exercer un jugement normatif sur le caractère souhaitable d'une politique par rapport à une autre. L'analyse constitue un excellent point de départ à une discussion plus large sur le bien-fondé des politiques publiques. Elle ne se substitue pas à un examen éthique de l'action gouvernementale. Elle ne tente pas de conclure à la supériorité d'une posture normative par rapport à une autre. Cependant, elle précise et spécifie la manière dont ces écoles de pensées sont mises en œuvre à l'intérieur des politiques.

Références

- Arcand, F. (2024, 21 septembre). Aide financière | des associations partent en croisade contre la précarité étudiante. *La Presse*. Consulté sur <https://www.lapresse.ca/actualites/education/2024-09-21/aide-financiere/des-associations-partent-en-croisade-contre-la-precarite-etudiante.php>
- Bouchard St-Amant, P.-A. (2020). *A literature review on student aid, rapport pour le compte d'emploi et développement social canada*. Consulté sur <https://cloud.grepa.ca/s/tZiXg37iHsLsMQQ>
- Bouchard St-Amant, P.-A., Tchokouagueu, F. A., Vallée, L., Lemieux-Bourque, A., & Bolduc, N. (2023). Rapport sur le financement et l'endettement des étudiants.e.s universitaires du québec, pour le compte de l'union étudiante du québec. *Groupe de recherche en économie publique appliquée*. Consulté sur <https://unionetudiante.ca/Media/publicDocuments/Rapport-sur-le-financement-et-lendettement-etudiantUEQ.pdf>
- Bovenberg, A. L., & Jacobs, B. (2005). Redistribution and education subsidies are siamese twins. *Journal of Public Economics*, 89 , 2005-2035. doi: 10.1016/J.JPUBECO.2004.12.004
- Castleman, B. L., & Long, B. T. (2016). Looking beyond enrollment : The causal effect of need-based grants on college access, persistence, and graduation. *Journal of Labor Economics*, 34 , 1023-1073. doi: 10.1086/686643
- Cigno, A., & Luperini, A. (2009). Scholarships or student loans ? subsidizing higher education in the presence of moral hazard. *Journal of Public Economic Theory*, 11 , 55-87. doi: 10.1111/J.1467-9779.2008.01397.X
- Cigno, A., & Luperini, A. (2019). Student loans and the allocation of graduate jobs. *Canadian Journal of Economics/Revue canadienne d'économie*, 52 , 339-378. doi: 10.1111/CAJE.12374
- Colas, M., Findeisen, S., & Sachs, D. (2021). Optimal need-based financial aid. *Journal of Political Economy*, 129 , 492-533. doi: 10.1086/711952
- Darolia, R. (2014). Working (and studying) day and night : Heterogeneous effects of working on the academic performance of full-time and part-time students. *Economics of Education Review*, 38 , 38-50. doi: 10.1016/J.ECONEDUREV.2013.10.004
- De Fraja, G. (2002). The design of optimal education policies - proquest. *The Review of Economic studies*, 69 , 437-466. Consulté sur <http://www.jstor.org/stable/1556738>

- Del Rey, E., & Racionero, M. (2006). Financing schemes for higher education. *European Journal of Political Economy*.
- Dynarski, S. M. (2003). Does aid matter ? measuring the effect of student aid on college attendance and completion. *American Economic Review*, 93 , 279-288. doi: 10.1257/000282803321455287
- Eckwert, B., & Zilcha, I. (2014). Higher education : Subsidizing tuition versus subsidizing student loans. *Journal of Public Economic Theory*, 16 , 835-853. doi: 10.1111/JPET.12082
- Evans, B. J., & Nguyen, T. D. (2019). Monetary substitution of loans, earnings, and need-based aid in postsecondary education : The impact of pell grant eligibility. *Economics of Education Review*. doi: 10.1016/j.econedurev.2019.02.004
- Findeisen, S., & Sachs, D. (2016). Education and optimal dynamic taxation : The role of income-contingent student loans. *Journal of Public Economics*, 138 , 1-21. doi: 10.1016/J.JPUBECO.2016.03.009
- Ford, R., Grekou, D., Kwakye, I., & Nicholson, C. (2014). Future to discover : Fourth year post-secondary impacts report. *Société de recherche sociale appliquée*. Consulté sur www.srdc.org
- Fortier-Martineau, C. (2022). *Analyse comparative des structures mathématiques des règles d'attribution des programmes canadiens d'aide financière aux études* (Mémoire de Master, École nationale d'administration publique). Consulté sur <https://espace.enap.ca/id/eprint/374/>
- Gary-Bobo, R. J., & Trannoy, A. (2015). Optimal student loans and graduate tax under moral hazard and adverse selection. *The RAND Journal of Economics*, 46 , 546-576. doi: 10.1111/1756-2171.12097
- Gouvernement du Québec. (2022, mars). *Crédits et dépenses des portefeuilles : Budget de dépenses 2022-2023* (Rapport technique). Québec, Québec : Secrétariat du Conseil du trésor. (ISBN : 978-2-550-91410-5 (en ligne))
- Hicks, J. R. (1939). The foundations of welfare economics. *The Economic Journal*, 49 , 696. doi: 10.2307/2225023
- Hindriks, J., & Myles, G. D. (2006). *Intermediate public economics* (MIT Press éd.).
- Jacobs, B. (2013). Optimal redistributive tax and education policies in general equilibrium. *Int Tax Public Finance*, 20 , 312-337. doi: 10.1007/s10797-012-9229-9
- Jacobs, B., & Thuemmel, U. (2022). Optimal linear income taxes and education subsidies under skill-biased technical change. *International Tax and Public Finance*, 1-47. doi: 10.1007/S10797-022-09756-8/FIGURES/5

- Jacobs, B., & Yang, H. (2016). Second-best income taxation and education policy with endogenous human capital and borrowing constraints. *International Tax and Public Finance*, 23 , 234-268. doi: 10.1007/S10797-015-9357-0/METRICS
- Kim, J., & Chatterjee, S. (2019). Student loans, health, and life satisfaction of us households : Evidence from a panel study. *Journal of Family and Economic Issues*, 40 , 36-50. doi: 10.1007/S10834-018-9594-3/METRICS
- Koeniger, W., & Prat, J. (2017). Human capital and optimal redistribution. *Review of Economic Dynamics*. doi: 10.1016/j.red.2017.10.002
- Krueger, D., & Ludwig, A. (2013). Optimal progressive labor income taxation and education subsidies when education decisions and intergenerational transfers are endogenous. *American Economic Review : Papers and Proceedings*, 103 , 496-501. doi: 10.1257/aer.103.3.496
- Lawson, N. (2017). Liquidity constraints, fiscal externalities, and optimal tuition subsidies. *American Economic Journal : Economic Policy*, 9 , 313-43. doi: 10.1257/POL.20150079
- Lindgren, K. P., Tristao, T., & Neighbors, C. (2022). The association between student loan debt and perceived socioeconomic status and problematic drinking and mental health symptoms : A preliminary investigation. *Addictive behaviors*, 139 , 107576. doi: 10.1016/J.ADDBEH.2022.107576
- Lochner, L., & Monge-Naranjo, A. (2011). The nature of credit constraints and human capital. *The American Economic Review*, 101 , 2487-2529. doi: 10.1257/aer.101.6.2487
- Lochner, L., & Monge-Naranjo, A. (2016). Student loans and repayment : Theory, evidence, and policy. *Handbook of the Economics of Education*. doi: 10.1016/B978-0-444-63459-7.00008-7
- Maldonado, D. (2008). Education policies and optimal taxation. *International Tax and Public Finance*, 15 , 131-143. doi: 10.1007/S10797-006-9015-7
- Mas-Colell, A., Whinston, M. D., & Green, J. R. (1995). *Microeconomic theory*. Oxford University Press.
- Mezza, A., Ringo, D., Sherlund, S., & Sommer, K. (2020). Student loans and homeownership. *Journal of Labor Economics*, 38 , 215-260. doi: 10.1086/704609/SUPPLFILE/16081DATA.ZIP
- Montmarquette, C., Vaillancourt, F., & Milord, B. (2021). Le rendement privé et social de l'éducation universitaire au québec en 2015. *CIRANO*. Consulté sur <https://enavantmath.org>

- Nguyen, T. D., Kramer, J. W., & Evans, B. J. (2019). The effects of grant aid on student persistence and degree attainment : A systematic review and meta-analysis of the causal evidence. *Review of Educational Research*, 89. doi: 10.3102/0034654319877156
- OCDE. (2021). *Regards sur l'éducation* (Rapport technique). Paris, France : Organisation de coopération et de développement économiques.
- Okun, A. M. (2015). *Equality and efficiency, the big tradeoff*. Brookings.
- Paolo, A. D., & Matano, A. (2022). The impact of combining work with study on the labour market performance of graduates : the joint role of work intensity and job-field match. *International Journal of Manpower*, 43. doi: 10.1108/IJM-03-2021-0182
- Pareto, V. (1909). *Manuel d'économie politique*. V. Giard et E. Brière. Consulté sur <http://digamoo.free.fr/pareto1909.pdf>
- Pernagallo, G. (2024). The student funding dilemma. *The Journal of Economic Asymmetries*, 30, e00369. doi: 10.1016/J.JECA.2024.E00369
- Rawls, J. (2001). *Justice as fairness : A restatement* (B. Guillarme, Trad.). Belknap Press.
- Renée, L. (s. d.). The long-term effects of career guidance in high school and student financial aid : Evidence from a randomized experiment. *American Economic Journal : Applied Economics*. doi: 10.1257/APP.20230342
- Rey, E. D., & Racionero, M. (2010). Financing schemes for higher education. *European Journal of Political Economy*, 26, 104-113. doi: 10.1016/J.EJPOLECO.2009.09.002
- St-Amant, P.-A. B., & Morin, H. (2021). Student aid reforms in quebec. *Canadian Public Policy / Analyse de Politiques*, 47, 373-398. doi: 10.2307/27085494
- Stantcheva, S. (2017). Optimal taxation and human capital policies over the life cycle. *Journal of Political Economy*, 125, 1931-1990. doi: 10.1086/694291
- Statistique Canada. (2022a). *Enquête sur la population active : cycles multiples*. Consulté sur <https://www150.statcan.gc.ca/t1/tbl1/fr/tv.action?pid=1410028701>
- Statistique Canada. (2022b). *Temps moyen consacré par jour à diverses activités, par groupe d'âge et le genre, 2022* (Rapport technique). Ottawa, Ontario : Statistique Canada. Consulté sur <https://www150.statcan.gc.ca>
- Stiglitz, J. E. (2015). *Economics of the public sector* (3rd éd. ; W. Norton, Ed.).
- Stinebrickner, R., & Stinebrickner, T. R. (2003). Working during school and academic performance. *Journal of Labor Economics*, 21, 473-491. doi: 10.1086/345565

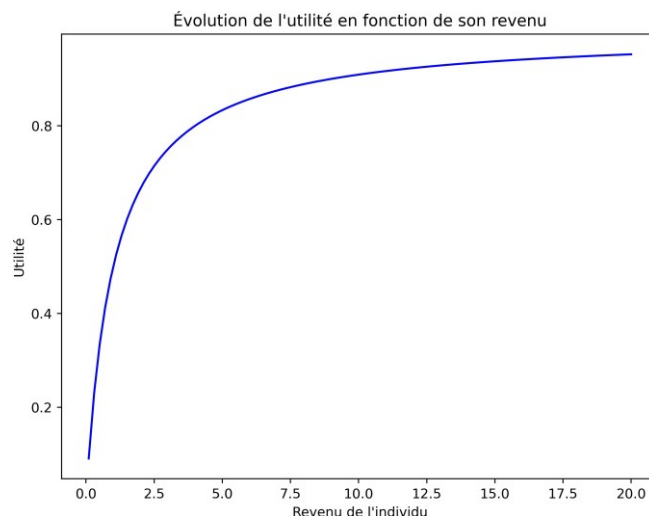
- Storn, R., & Price, K. (1997). Differential evolution - a simple and efficient heuristic for global optimization over continuous spaces. *Journal of Global Optimization*, 11 , 341-359. doi: 10.1023/A:1008202821328/METRICS
- Uttl, B. (2024). Student evaluation of teaching (set) : Why the emperor has no clothes and what we should do about it. *Human Arenas*, 7 . doi: 10.1007/s42087-023-00361-7
- Varian, H. R. (1994, septembre). What use is economic theory ? *Method and Hist of Econ Thought*.

Annexes

Glossaire des variables

Symbole	Description de la variable
U_1	utilité au moment des études (période 1)
U_2	utilité à la période 2
ΔU_2	gain d'utilité à la diplomation
c	consommation de l'étudiant
a	temps consacré au loisir (ni au travail ni aux études)
e_1	heures consacrées aux études (effort)
τ	taux de contribution étudiante
T	impôt sur le revenu du diplômé
M_1	montant maximal de bourses
M_2	prêts
w	salaire au moment des études
$\bar{W}$	salaire du diplômé
W	salaire du non-diplômé
G	dépenses du gouvernement des programmes autres que l'AFE
α	puissance du loisir dans la fonction d'utilité de l'étudiant
β	puissance de la consommation dans la fonction d'utilité de l'étudiant
σ	puissance du revenu net à la seconde période dans la fonction d'utilité de l'étudiant
γ	facteur multiplicatif de l'utilité à la seconde période dans la fonction d'utilité de l'étudiant

Fonction croissante et concave



GRAPHIQUE 16 – Illustration d'une fonction concave

Preuves mathématiques de la concavité des fonctions choisies

Utilité à la période 1 En guise de rappel, l'utilité à la première période prend la forme Cobb-Douglass suivante :

$$U_{1i} = (c_i - c_{min})^\beta a_i^\alpha, \text{ où } \alpha, \beta \in [0, 1]$$

Pour que la fonction soit concave au regard des arguments c, a , nous devons avoir $\frac{\partial U}{\partial a_i} > 0$, $\frac{\partial^2 U}{\partial a_i^2} < 0$, $\frac{\partial U}{\partial c_i} > 0$ et $\frac{\partial^2 U}{\partial c_i^2} < 0$. Les expressions suivantes montrent les dérivées premières et secondes de la fonction d'utilité :

$$\frac{\partial U}{\partial a_i} = \alpha (c_i - c_{min})^\beta a_i^{\alpha-1} \geq 0,$$

$$\frac{\partial^2 U}{\partial a_i^2} = \alpha(\alpha - 1)(c_i - c_{min})^\beta a_i^{\alpha-2},$$

$$\frac{\partial U}{\partial c_i} = \beta (c_i - c_{min})^{\beta-1} a_i^\alpha \geq 0 \text{ et}$$

$$\frac{\partial^2 U}{\partial c_i^2} = (\beta - 1)\beta(c_i - c_{min})^{\beta-2} \alpha a_i.$$

Les dérivées premières sont toutes les deux plus grandes ou égales à zéro. Les facteurs multiplicatifs α et β sont compris entre zéro et un. Ce faisant, $\alpha - 1$ et $\beta - 1$ sont négatifs. Ainsi, les dérivées secondes sont forcément négatives. Les fonctions respectent l'exigence de concavité.

Utilité à la période 2 La fonction d'utilité à la seconde période prend la forme suivante :

$$\xrightarrow{\text{S'il diplôme}} \quad \xrightarrow{\text{S'il ne diplôme pas}} \\ U_{2i} = ((1 - T)\bar{W} - M_2)^\sigma \text{ et } U_{2j} = (W - M_2)^\sigma.$$

Pour déterminer la concavité de la fonction, il faut d'abord la dériver par rapport à son argument :

$$U'_{2i}(\cdot) = \sigma((1 - T)\bar{W} - M_2)^{\sigma-1}$$

qui est positive pour toutes les valeurs possibles de σ . La dérivée seconde donne quant à elle :

$$U''_{2i}(\cdot) = \sigma(\sigma - 1)((1 - T)\bar{W} - M_2)^{\sigma-2}.$$

Comme $\sigma - 1 < 0$, puisque $\sigma \in [0, 1]$, la dérivée seconde est négative. La fonction est donc croissante et concave.

Résultat théorique au sujet de la dérivée par rapport à la variable prêt du gain d'utilité à la diplomation

Comme défini plus haut dans l'analyse, je désigne

$$\Delta U_2 = U_2((1 - T)\bar{W} - M_2) - U_2(W - M_2). \quad (40)$$

Si je dérive l'expression par rapport à M_2 , j'obtiens :

$$\frac{\partial}{\partial M_2} \Delta U_2 = -U'((1 - T)\bar{W} - M_2) + U'(W - M_2). \quad (41)$$

Je peux réorganiser de la sorte

$$\frac{\partial}{\partial M_2} \Delta U_2 = U'(W - M_2) - U'((1 - T)\bar{W} - M_2). \quad (42)$$

Suivant la définition d'une fonction concave et croissante, je sais que la fonction U_2 qui désigne l'utilité à la seconde période sera toujours croissante lorsque le salaire augmente. Or, elle augmente toujours de moins en moins comme le montre l'exemple d'une telle fonction à l'annexe 1. Ainsi, tant et aussi longtemps que $(1 - T)\bar{W} > W$, $\frac{\partial}{\partial M_2} \Delta U_2$ reste toujours positif.

Condition nécessaire à la présence d'un maximum

Les conditions du choix optimal ont été obtenus avec les conditions de premier ordre du choix de l'étudiant. Ici-bas, je discute des conditions mathématiques nécessaires pour que l'optimum trouvé soit un maximum et non un minimum. Pour ce faire, je dois faire appel à la matrice hessienne des dérivées secondes de la fonction de Lagrange de l'étudiant. Cette matrice est la suivante :

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} \frac{\partial^2 U}{\partial c_i^2} & \frac{\partial^2 U}{\partial c_i \partial a_i} & 0 & -1 \\ \frac{\partial U}{\partial c_i \partial a_i} & \frac{\partial U}{\partial a_i^2} & 0 & -(1 - \tau)w_i \\ 0 & 0 & \frac{d^2 p}{d e_1^2} \Delta U_2 & -(1 - \tau)w_i \\ -1 & -(1 - \tau)w_i & -(1 - \tau)w_i & 0 \end{bmatrix} \quad (43)$$

La condition d'obtention d'un maximum veut que la matrice $\mathbf{A}$ soit négative semi-définie. En terme mathématique, cela implique le produit $\mathbf{x}^T \mathbf{A} \mathbf{x} \leq 0 \quad \forall \mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$. Pour le compte de l'exercice, je choisis un vecteur $\mathbf{x}$ où toutes ses composantes sont

égales à un. Le produit devient :

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{\partial^2 U}{\partial c_i^2} & \frac{\partial^2 U}{\partial c_i \partial a_i} & 0 & -1 \\ \frac{\partial U}{\partial c_i \partial a_i} & \frac{\partial U}{\partial a_i^2} & 0 & -(1-\tau)w_i \\ 0 & 0 & \frac{d^2 p}{de_1^2} \Delta U_2 & -(1-\tau)w_i \\ -1 & -(1-\tau)w_i & -(1-\tau)w_i & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

J'obtiens la condition suivante :

$$\frac{\partial^2 U}{\partial c_i^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial a_i^2} + \frac{d^2 p}{de_1^2} \Delta U_2 - 4(1-\tau)w_i - 2 \leq -2 \frac{\partial^2 U}{\partial c_i \partial a_i}$$

Il s'agit d'une condition facile à remplir mais requiert d'avoir $\frac{\partial^2 U}{\partial c_i \partial a_i}$ à faible amplitude. C'est le cas avec les fonctions d'utilité que j'utilise.

Statique comparative dans le problème de l'étudiant

Pour débiter, je récupère les conditions de premier ordre dérivées du problème de l'étudiant. Dans cette section, je dérive les expressions de statique comparative pour les étudiants de type 1 uniquement.

$$\begin{aligned} \frac{\partial U_1}{\partial c_i} &= \lambda_i, \\ \frac{\partial U_1}{\partial a_i} &= \lambda_i(1-\tau)w, \\ \frac{dp}{de_{1i}} (U_2((1-\tau)\bar{W} - M_2) - U_2(W - M_2)) &= \lambda_i(1-\tau)w, \\ (1-\tau)w(1 - e_{1i} - a) + M_1 + M_2 &= c_i. \end{aligned}$$

Effets d'une augmentation du niveau de bourses

Du premier cas de figure, je souhaite déterminer le changement du comportement de l'étudiant lorsque le niveau de bourses augmente à la marge. Je vais, pour ce faire,

dériver les deux côtés du système d'équations par M_1 :

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 U}{\partial c_i^2} \frac{\partial c_i}{\partial M_1} + \frac{\partial^2 U}{\partial c_i \partial a_i} \frac{\partial a_i}{\partial M_1} &= \frac{\partial \lambda_i}{\partial M_1} \\ \frac{\partial^2 U}{\partial a_i^2} \frac{\partial a_i}{\partial M_1} + \frac{\partial^2 U}{\partial c_i \partial a_i} \frac{\partial c_i}{\partial M_1} &= \frac{\partial \lambda_i}{\partial M_1} (1 - \tau) w_i \\ \frac{d^2 p}{de_{1i}^2} \Delta U_2 \frac{\partial e_{1i}}{\partial M_1} &= \frac{\partial \lambda_i}{\partial M_1} (1 - \tau) w_i \\ \frac{\partial c_i}{\partial M_1} + (1 - \tau) w_i \left[\frac{\partial e_{1i}}{\partial M_1} + \frac{\partial a_i}{\partial M_1} \right] &= 1 \end{aligned}$$

Je peux maintenant écrire le système d'équations sous forme matricielle ($\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$) :

$$\begin{bmatrix} \frac{\partial^2 U}{\partial c_i^2} & \frac{\partial^2 U}{\partial c_i \partial a_i} & 0 & -1 \\ \frac{\partial^2 U}{\partial c_i \partial a_i} & \frac{\partial^2 U}{\partial a_i^2} & 0 & -(1 - \tau) w_i \\ 0 & 0 & \frac{d^2 p}{de_{1i}^2} \Delta U_2 & -(1 - \tau) w_i \\ -1 & -(1 - \tau) w_i & -(1 - \tau) w_i & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{\partial c_i}{\partial M_1} \\ \frac{\partial a_i}{\partial M_1} \\ \frac{\partial e_{1i}}{\partial M_1} \\ \frac{\partial \lambda_i}{\partial M_1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\partial \lambda_i}{\partial M_1} \\ 0 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix}$$

Il suffit d'utiliser la méthode Cramer pour résoudre ce système d'équations linéaires. Pour ce faire, la méthode de Cramer demande de diviser le déterminant de la matrice $\mathbf{A}$ transformée par le déterminant de la matrice $\mathbf{A}$. La matrice transformée requiert de substituer une colonne de la matrice $\mathbf{A}$ par le vecteur $\mathbf{b}$. La colonne substituée coïncide avec la ligne de la variable dont je souhaite trouver la valeur. Ainsi, si je veux trouver la valeur de $\frac{\partial c_i}{\partial M_1}$, je dois substituer la première colonne de la matrice $\mathbf{A}$ par le vecteur $\mathbf{b}$. Comme $\mathbf{A}$ et son déterminant reviendront de manière récurrente à travers la démonstration qui suit, je prendrai le temps de le calculer une fois. Ainsi

$$|\mathbf{A}| = \begin{vmatrix} \frac{\partial^2 U}{\partial c_i^2} & \frac{\partial^2 U}{\partial c_i \partial a_i} & 0 & -1 \\ \frac{\partial^2 U}{\partial c_i \partial a_i} & \frac{\partial^2 U}{\partial a_i^2} & 0 & -(1 - \tau) w_i \\ 0 & 0 & \frac{d^2 p}{de_{1i}^2} \Delta U_2 & -(1 - \tau) w_i \\ -1 & -(1 - \tau) w_i & -(1 - \tau) w_i & 0 \end{vmatrix}$$

$$\begin{aligned}
& - (1 - \tau)^2 w_i^2 \frac{\partial^2 U}{\partial c_i^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial a_i^2} + \frac{d^2 p}{de_1^2} \Delta U_2 - \frac{\partial^2 U}{\partial a_i^2} \frac{d^2 p}{de_1^2} \Delta U_2 + (1 - \tau)^2 w_i^2 \frac{\partial^2 U}{\partial c_i \partial a_i} + 2(1 - \tau) w_i \frac{\partial^2 U}{\partial c_i \partial a_i} \frac{d^2 p}{de_1^2} \Delta U_2
\end{aligned}$$

Ainsi, j'obtiens :

$$\begin{aligned}
& \begin{array}{cccc}
-0 & \frac{\partial^2 U}{\partial c_i \partial a_i} & 0 & -1 \\
-0 & \frac{\partial^2 U}{\partial a_i^2} & 0 & -(1 - \tau) w_i \\
0 & 0 & \frac{d^2 p}{de_1^2} \Delta U_2 & -(1 - \tau) w_i \\
-1 & -(1 - \tau) w_i & -(1 - \tau) w_i & 0
\end{array} \\
\frac{\partial c_i}{\partial M_1} = \frac{|A|}{(1 - \tau) w_i \frac{\partial^2 U}{\partial c_i \partial a_i} \frac{d^2 p}{de_1^2} \Delta U_2 - \frac{\partial^2 U}{\partial a_i^2} \frac{d^2 p}{de_1^2} \Delta U_2} & \quad (44)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& \begin{array}{cccc}
\frac{\partial^2 U}{\partial c_i^2} & 0 & 0 & -1 \\
\frac{\partial^2 U}{\partial c_i \partial a_i} & 0 & 0 & -(1 - \tau) w_i \\
0 & 0 & \frac{d^2 p}{de_1^2} \Delta U_2 & -(1 - \tau) w_i \\
-1 & -1 & -(1 - \tau) w_i & 0
\end{array} \\
\frac{\partial a_i}{\partial M_1} = \frac{|A|}{\frac{\partial^2 U}{\partial c_i \partial a_i} \frac{d^2 p}{de_1^2} \Delta U_2 - (1 - \tau) w_i \frac{\partial^2 U}{\partial c_i^2} \frac{d^2 p}{de_1^2} \Delta U_2} & \quad (45)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& \begin{array}{cccc}
\frac{\partial^2 U}{\partial c_i^2} & \frac{\partial^2 U}{\partial c_i \partial a_i} & 0 & -1 \\
\frac{\partial^2 U}{\partial c_i \partial a_i} & \frac{\partial^2 U}{\partial a_i^2} & 0 & -(1 - \tau) w_i \\
0 & 0 & 0 & -(1 - \tau) w_i \\
-1 & -(1 - \tau) w_i & -1 & 0
\end{array} \\
\frac{\partial e_{1i}}{\partial M_1} = \frac{|A|}{(1 - \tau) w_i \left(\frac{\partial^2 U}{\partial c_i \partial a_i} \frac{d^2 p}{de_1^2} \Delta U_2 - \frac{\partial^2 U}{\partial c_i^2} \frac{d^2 p}{de_1^2} \Delta U_2 \right)} & \quad (46)
\end{aligned}$$

Effets d'une augmentation du niveau de prêts

Je répète les mêmes étapes qui précèdent mais en dérivant les conditions de premier ordre par la variable des prêts. J'obtiens ainsi :

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 U}{\partial c_i^2} \frac{\partial c_i}{\partial M_2} + \frac{\partial^2 U}{\partial c_i \partial a_i} \frac{\partial a_i}{\partial M_2} &= \frac{\partial \lambda_i}{\partial M_2} \\ \frac{\partial^2 U}{\partial a_i^2} \frac{\partial a_i}{\partial M_2} + \frac{\partial^2 U}{\partial c_i \partial a_i} \frac{\partial c_i}{\partial M_2} &= \frac{\partial \lambda_i}{\partial M_2} (1 - \tau) w_i \\ \frac{d^2 p}{de_1^2} \frac{\partial e_{1i}}{\partial M_2} \Delta U_2 + \frac{dp}{de_1} \frac{\partial}{\partial M_2} \Delta U_2 &= \frac{\partial \lambda_i}{\partial M_2} (1 - \tau) w_i \\ (1 - \tau) w_i \left(-\frac{\partial e_{1i}}{\partial M_2} - \frac{\partial a_i}{\partial M_2} \right) + 1 &= \frac{\partial c_i}{\partial M_2} \end{aligned}$$

De manière équivalente à la section précédente, je peux écrire le système d'équations linéaires sous forme matricielle de cette façon :

$$\begin{bmatrix} \frac{\partial^2 U}{\partial c_i^2} & \frac{\partial^2 U}{\partial c_i \partial a_i} & 0 & -1 \\ \frac{\partial^2 U}{\partial c_i \partial a_i} & \frac{\partial^2 U}{\partial a_i^2} & 0 & -(1 - \tau) w_i \\ 0 & 0 & \frac{d^2 p}{de_1^2} \Delta U_2 & -(1 - \tau) w_i \\ -1 & -(1 - \tau) w_i & -(1 - \tau) w_i & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{\partial c_i}{\partial M_2} \\ \frac{\partial a_i}{\partial M_2} \\ \frac{\partial e_{1i}}{\partial M_2} \\ \frac{\partial \lambda_i}{\partial M_2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \frac{dp}{de_1} \frac{\partial}{\partial M_2} \Delta U_2 \\ -1 \end{bmatrix}$$

Ensuite, la résolution du système par la méthode de Cramer donne :

$$\frac{\partial c_i}{\partial M_2} = \frac{\begin{vmatrix} 0 & \frac{\partial^2 U}{\partial c_i \partial a_i} & 0 & -1 \\ 0 & \frac{\partial^2 U}{\partial a_i^2} & 0 & -(1 - \tau) w_i \\ -\frac{dp}{de_1} \frac{\partial}{\partial M_2} \Delta U_2 & 0 & \frac{d^2 p}{de_1^2} \Delta U_2 & -(1 - \tau) w_i \\ -1 & -(1 - \tau) w_i & -(1 - \tau) w_i & 0 \end{vmatrix}}{|\mathbf{A}|}$$

$$\frac{\partial c_i}{\partial M_2} = \frac{1}{|\mathbf{A}|} \begin{matrix} \mathbf{C} & \mathbf{A} & \mathbf{B} \\ (1 - \tau)w_i \frac{\partial^2 U}{\partial c_i \partial a_i} & (1 - \tau)w_i \frac{dp}{de_1} \frac{\partial}{\partial M_2} \Delta U_2 + \frac{d^2 p}{de_1^2} \Delta U_2 \\ - (1 - \tau)w_i \frac{dp}{de_1} \frac{\partial}{\partial M_2} \Delta U_2 \frac{\partial^2 U}{\partial a_i^2} & - \frac{\partial^2 U}{\partial a_i^2} \frac{d^2 p}{de_1^2} \Delta U_2 \end{matrix} \quad (47)$$

$$\frac{\partial a_i}{\partial M_2} = \frac{\begin{matrix} \frac{\partial^2 U}{\partial c_i^2} & 0 & 0 & -1 \\ -\frac{\partial^2 U}{\partial c_i \partial a_i} & 0 & 0 & -(1 - \tau)w_i \\ 0 & -\frac{dp}{de_1} \frac{\partial}{\partial M_2} \Delta U_2 & \frac{d^2 p}{de_1^2} \Delta U_2 & -(1 - \tau)w_i \\ -1 & -1 & -(1 - \tau)w_i & 0 \end{matrix}}{|\mathbf{A}|}$$

$$\frac{\partial a_i}{\partial M_2} = \frac{1}{|\mathbf{A}|} \begin{matrix} \mathbf{C} & \mathbf{A} & \mathbf{B} \\ \frac{\partial^2 U}{\partial c_i \partial a_i} & (1 - \tau)w_i \frac{dp}{de_1} \frac{\partial}{\partial M_2} \Delta U_2 + \frac{d^2 p}{de_1^2} \Delta U_2 \\ - (1 - \tau)w_i \frac{dp}{de_1} \frac{\partial}{\partial M_2} \Delta U_2 \frac{\partial^2 U}{\partial c_i^2} & \frac{\partial^2 U}{\partial c_i^2} \frac{d^2 p}{de_1^2} \Delta U_2 \end{matrix} \quad (48)$$

$$\frac{\partial e_{1i}}{\partial M_2} = \frac{\begin{matrix} \frac{\partial^2 U}{\partial c_i^2} & \frac{\partial^2 U}{\partial c_i \partial a_i} & 0 & -1 \\ -\frac{\partial^2 U}{\partial c_i \partial a_i} & \frac{\partial^2 U}{\partial a_i^2} & 0 & -(1 - \tau)w_i \\ 0 & 0 & -\frac{dp}{de_1} \frac{\partial}{\partial M_2} \Delta U_2 & -(1 - \tau)w_i \\ -1 & -(1 - \tau)w_i & -1 & 0 \end{matrix}}{|\mathbf{A}|}$$

$$\frac{\partial e_{1i}}{\partial M_2} = \frac{1}{|A|} \frac{\partial^2 U}{\partial c_i \partial a_i} (1 - \tau) w_i \frac{\partial^2 U}{\partial c_i \partial a_i} - 2 \frac{dp}{de_1} \frac{\partial}{\partial M_2} \Delta U_2 + (1 - \tau) w_i \frac{\partial^2 U}{\partial c_i^2} \frac{\partial}{\partial M_2} \Delta U_2 - (1 - \tau) w_i \frac{\partial^2 U}{\partial c_i^2} \frac{\partial}{\partial a_i^2} + \frac{dp}{de_1} \frac{\partial}{\partial M_2} \Delta U_2 \frac{\partial^2 U}{\partial a_i^2} \quad (49)$$

Comparaison de la dérivée de l'effort par rapport au prêt et de la dérivée de l'effort par rapport au niveau de bourses. Je compare ici les numérateurs de l'équation (49) au numérateur de l'équation (46). Pour le compte de la comparaison, il s'agit dans les deux cas, du numérateur non simplifié. J'obtiens donc :

$$\frac{\partial e_{1i}}{\partial M_1} = (1 - \tau) w_i \frac{\partial^2 U}{\partial c_i \partial a_i} - (1 - \tau) w_i \frac{\partial^2 U}{\partial a_i^2} \frac{\partial^2 U}{\partial c_i^2} \quad (50)$$

et

$$\begin{aligned} \frac{\partial e_{1i}}{\partial M_2} = & (1 - \tau) w_i \frac{\partial^2 U}{\partial c_i \partial a_i} - (1 - \tau) w_i \frac{\partial^2 U}{\partial a_i^2} \frac{\partial^2 U}{\partial c_i^2} \\ & + (1 - \tau) w_i \frac{\partial^2 U}{\partial c_i^2} \frac{\partial}{\partial M_2} \Delta U_2 \\ & - 2(1 - \tau) w_i \frac{dp}{de_1} \frac{\partial}{\partial M_2} \Delta U_2 \frac{\partial^2 U}{\partial c_i \partial a_i} \\ & + \frac{dp}{de_1} \frac{\partial}{\partial M_2} \Delta U_2 \frac{\partial^2 U}{\partial a_i^2} \end{aligned} \quad (51)$$

Les deux premiers termes des deux équations sont identiques. La seconde équation diffère de la première par ses trois autres termes. Il est possible de remarquer que ses trois termes sont négatifs. Le dénominateur est négatif également. Ce faisant, ces trois termes auront toujours un effet positif sur la dérivée de l'effort en fonction du prêt. Concrètement, ceci veut dire que le prêt induit toujours un plus haut niveau d'effort que le fait la bourse.

Effets d'une augmentation du taux de contribution étudiante

Je dérive cette fois ci le système d'équations initial par le taux de contribution étudiante τ . J'obtiens le système suivant :

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 U}{\partial c_i^2} \frac{\partial c_i}{\partial \tau} + \frac{\partial^2 U}{\partial c_i \partial a_i} \frac{\partial a_i}{\partial \tau} &= \frac{\partial \lambda_i}{\partial \tau} \\ \frac{\partial^2 U}{\partial a_i^2} \frac{\partial a_i}{\partial \tau} + \frac{\partial^2 U}{\partial c_i \partial a_i} \frac{\partial c_i}{\partial \tau} &= \frac{\partial \lambda_i}{\partial \tau} (1 - \tau) w_i - \lambda w_i \\ \frac{d^2 p}{de_{1i}^2} \frac{\partial e_{1i}}{\partial \tau} \Delta U_2 &= \frac{\partial \lambda_i}{\partial \tau} (1 - \tau) w_i - \lambda w_i \\ -w_i (55 - e_{1i}^* - a_i^*) + (1 - \tau) w_i \left(-\frac{\partial e_{1i}}{\partial \tau} - \frac{\partial a_i}{\partial \tau} \right) &= \frac{\partial c_i}{\partial \tau} \end{aligned}$$

Cela mène au système d'équations linéaires suivant :

$$\begin{bmatrix} \frac{\partial^2 U}{\partial c_i^2} & \frac{\partial^2 U}{\partial c_i \partial a_i} & 0 & -1 & \frac{\partial c_i}{\partial \tau} & 0 \\ \frac{\partial^2 U}{\partial c_i \partial a_i} & \frac{\partial^2 U}{\partial a_i^2} & 0 & -(1 - \tau) w_i & \frac{\partial a_i}{\partial \tau} & -\lambda w_i \\ 0 & 0 & \frac{d^2 p}{de_{1i}^2} \Delta U_2 & -(1 - \tau) w_i & \frac{\partial e_{1i}}{\partial \tau} & -\lambda w_i \\ -1 & -(1 - \tau) w_i & -(1 - \tau) w_i & 0 & \frac{\partial \lambda_i}{\partial \tau} & w_i (55 - e_{1i}^* - a_i^*) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{\partial c_i}{\partial \tau} \\ \frac{\partial a_i}{\partial \tau} \\ \frac{\partial e_{1i}}{\partial \tau} \\ \frac{\partial \lambda_i}{\partial \tau} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ -\lambda w_i \\ -\lambda w_i \\ w_i (55 - e_{1i}^* - a_i^*) \end{bmatrix}$$

Ainsi la méthode de Cramer donne :

$$\frac{\partial c_i}{\partial \tau} = \frac{\begin{vmatrix} 0 & \frac{\partial^2 U}{\partial c_i \partial a_i} & 0 & -1 \\ -\lambda w_i & \frac{\partial^2 U}{\partial a_i^2} & 0 & -(1 - \tau) w_i \\ -\lambda w_i & 0 & \frac{d^2 p}{de_{1i}^2} \Delta U_2 & -(1 - \tau) w_i \\ w_i (55 - e_{1i}^* - a_i^*) & -(1 - \tau) w_i & -(1 - \tau) w_i & 0 \end{vmatrix}}{|A|}$$

$$\frac{\partial c_i}{\partial \tau} = \frac{1}{|\mathbf{A}|} \begin{matrix} \mathbf{C} \\ w_i(55 - e_{1i}^* - a_i^*) \frac{\partial^2 U}{\partial a_i^2} \frac{d^2 p}{de_1^2} \Delta U_2 \\ - (1 - \tau) w_i \lambda_i \frac{\partial^2 U}{\partial a_i^2} + \frac{d^2 p}{de_1^2} \Delta U_2 \\ - (1 - \tau) w_i (55 - e_{1i}^* - a_i^*) \frac{\partial^2 U}{\partial c_i \partial a_i} \frac{d^2 p}{de_1^2} \Delta U_2 \end{matrix} \quad (52)$$

$$\frac{\partial a_i}{\partial \tau} = \frac{\begin{matrix} -\frac{\partial^2 U}{\partial c_i^2} & 0 & 0 & -1 \\ -\frac{\partial^2 U}{\partial c_i \partial a_i} & -\lambda w_i & 0 & -(1 - \tau) w_i \\ 0 & -\lambda w_i & \frac{d^2 p}{de_1^2} \Delta U_2 & -(1 - \tau) w_i \end{matrix}}{|\mathbf{A}|}$$

$$\frac{\partial a_i}{\partial \tau} = \frac{1}{|\mathbf{A}|} \begin{matrix} \mathbf{C} \\ (1 - \tau) w_i (55 - e_{1i}^* - a_i^*) \frac{\partial^2 U}{\partial c_i^2} \frac{d^2 p}{de_1^2} \Delta U_2 \\ + \lambda_i w_i \frac{\partial^2 U}{\partial c_i \partial a_i} \frac{d^2 p}{de_1^2} \Delta U_2 \\ + \frac{\partial^2 U}{\partial c_i \partial a_i} (1 - \tau) w_i^2 \lambda_i - w_i (55 - e_{1i}^* - a_i^*) \end{matrix} \quad (53)$$

$$\frac{\partial e_{1i}}{\partial \tau} = \frac{\begin{matrix} -\frac{\partial^2 U}{\partial c_i^2} & \frac{\partial^2 U}{\partial c_i \partial a_i} & 0 & -1 \\ -\frac{\partial^2 U}{\partial c_i \partial a_i} & \frac{\partial^2 U}{\partial a_i^2} & -\lambda w_i & -(1 - \tau) w_i \\ 0 & 0 & -\lambda w_i & -(1 - \tau) w_i \end{matrix}}{|\mathbf{A}|}$$

$$\frac{\partial e_{1i}}{\partial \tau} = \frac{1}{|A|} \left((1 - \tau) w_i (55 - e_{1i}^* - a_i^*) \frac{\partial^2 U}{\partial c_i^2} \frac{\partial^2 U}{\partial a_i^2} + \lambda_i w_i \frac{\partial^2 U}{\partial a_i^2} - \frac{\partial^2 U}{\partial c_i \partial a_i} (1 - \tau) w_i - w_i (55 - e_{1i}^* - a_i^*) \frac{\partial^2 U}{\partial c_i \partial a_i} - w_i \lambda_i \right) \quad (54)$$

Comme les CPO permettent d'exprimer λ à l'aide des dérivées, je vais le remplacer dans les trois équations.

$$\frac{\partial c_i}{\partial \tau} = \frac{1}{|A|} \left(w_i (55 - e_{1i}^* - a_i^*) \frac{\partial^2 U}{\partial a_i^2} \frac{d^2 p}{d e_1^2} \Delta U_2 - (1 - \tau) w_i \frac{\partial^2 U}{\partial c_i} \frac{\partial^2 U}{\partial a_i^2} + \frac{\partial^2 U}{d e_1^2} \Delta U_2 - (1 - \tau) w_i (55 - e_{1i}^* - a_i^*) \frac{\partial^2 U}{\partial c_i \partial a_i} \frac{d^2 p}{d e_1^2} \Delta U_2 \right) \quad (55)$$

$$\frac{\partial a_i}{\partial \tau} = \frac{1}{|A|} \left((1 - \tau) w_i (55 - e_{1i}^* - a_i^*) \frac{\partial^2 U}{\partial c_i^2} \frac{d^2 p}{d e_1^2} \Delta U_2 + \frac{\partial^2 U}{\partial c_i} w_i \frac{d^2 p}{d e_1^2} \Delta U_2 + \frac{\partial^2 U}{\partial c_i \partial a_i} (1 - \tau) w_i^2 \frac{\partial U}{\partial c_i} - w_i (55 - e_{1i}^* - a_i^*) \right) \quad (56)$$

$$\frac{\partial e_{1i}}{\partial \tau} = \frac{1}{|A|} \left((1 - \tau) w_i (55 - e_{1i}^* - a_i^*) \frac{\partial^2 U}{\partial c_i^2} \frac{\partial^2 U}{\partial a_i^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial c_i} w_i \frac{\partial^2 U}{\partial a_i^2} - \frac{\partial^2 U}{\partial c_i \partial a_i} (1 - \tau) w_i - w_i (55 - e_{1i}^* - a_i^*) \frac{\partial^2 U}{\partial c_i \partial a_i} - w_i \frac{\partial U}{\partial c_i} \right) \quad (57)$$

Effets d'une augmentation du taux d'imposition

Je dérive le système d'équations initial par le taux d'imposition sur le revenu des diplômés T . J'obtiens :

$$\frac{\partial^2 U}{\partial c_i^2} \frac{\partial c_i}{\partial T} + \frac{\partial^2 U}{\partial c_i \partial a_i} \frac{\partial a_i}{\partial T} = \frac{\partial \lambda_i}{\partial T}$$

$$\frac{\partial^2 U}{\partial a_i^2} \frac{\partial a_i}{\partial T} + \frac{\partial^2 U}{\partial c_i \partial a_i} \frac{\partial c_i}{\partial T} = \frac{\partial \lambda_i}{\partial T} (1 - \tau) w_i$$

$$\frac{d^2 p}{de_{1i}} \frac{\partial e_{1i}}{\partial T} \Delta U_2 - \frac{dp}{de_{1i}} U ((1 - \tau)W - M_2)W = \frac{\partial \lambda_i}{\partial T} (1 - \tau) w_i$$

$$\frac{\partial c_i}{\partial T} = -(1 - \tau) w_i \left[\frac{\partial a_i}{\partial T} + \frac{\partial e_{1i}}{\partial T} \right]$$

Cela mène au système d'équations linéaires suivant :

$$\begin{bmatrix} \frac{\partial^2 U}{\partial c_i^2} & \frac{\partial^2 U}{\partial c_i \partial a_i} & 0 & -1 & \frac{\partial c_i}{\partial T} & 0 \\ \frac{\partial^2 U}{\partial c_i \partial a_i} & \frac{\partial^2 U}{\partial a_i^2} & 0 & -(1 - \tau) w_i & \frac{\partial a_i}{\partial T} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{d^2 p}{de_{1i}} \Delta U_2 & -(1 - \tau) w_i & \frac{\partial e_{1i}}{\partial T} & \frac{dp}{de_1} \frac{\partial}{\partial T} \Delta U_2 \\ -1 & -(1 - \tau) w_i & -(1 - \tau) w_i & 0 & \frac{\partial \lambda_i}{\partial T} & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{\partial c_i}{\partial T} \\ \frac{\partial a_i}{\partial T} \\ \frac{\partial e_{1i}}{\partial T} \\ \frac{\partial \lambda_i}{\partial T} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Avec la méthode de Cramer, j'obtiens :

$$\frac{\partial c_i}{\partial T} = \frac{\begin{vmatrix} 0 & \frac{\partial^2 U}{\partial c_i \partial a_i} & 0 & -1 \\ 0 & \frac{\partial^2 U}{\partial a_i^2} & 0 & -(1 - \tau) w_i \\ -\frac{dp}{de_1} \frac{\partial}{\partial T} \Delta U_2 & 0 & \frac{d^2 p}{de_{1i}} \Delta U_2 & -(1 - \tau) w_i \\ 0 & -(1 - \tau) w_i & -(1 - \tau) w_i & 0 \end{vmatrix}}{|\mathbf{A}|}$$

$$\frac{\partial c_i}{\partial T} = \frac{(1 - \tau)^2 w_i^2 \frac{dp}{de_1} \frac{\partial}{\partial T} \Delta U_2 \frac{\partial^2 U}{\partial c_i \partial a_i} - (1 - \tau) w_i \frac{dp}{de_1} \frac{\partial}{\partial T} \Delta U_2 \frac{\partial^2 U}{\partial a_i^2}}{|\mathbf{A}|} \quad (58)$$

$$\frac{\partial a_i}{\partial T} = \frac{\begin{vmatrix} \frac{\partial^2 U}{\partial c_i^2} & 0 & 0 & -1 \\ \frac{\partial^2 U}{\partial c_i \partial a_i} & 0 & 0 & -(1 - \tau) w_i \\ 0 & -\frac{dp}{de_1} \frac{\partial}{\partial T} \Delta U_2 & \frac{d^2 p}{de_{1i}} \Delta U_2 & -(1 - \tau) w_i \\ -1 & 0 & -(1 - \tau) w_i & 0 \end{vmatrix}}{|\mathbf{A}|}$$

$$\frac{\partial a_i}{\partial T} = \frac{(1 - \tau) w_i \frac{dp}{de_1} \frac{\partial}{\partial T} \Delta U_2 \frac{\partial^2 U}{\partial c_i \partial a_i} - (1 - \tau)^2 w_i^2 \frac{dp}{de_1} \frac{\partial}{\partial T} \Delta U_2 \frac{\partial^2 U}{\partial a_i^2}}{|\mathbf{A}|} \quad (59)$$

$$\begin{aligned}
& \begin{array}{cccc}
-\frac{\partial^2 U}{\partial c_i^2} & \frac{\partial^2 U}{\partial c_i \partial a_i} & 0 & -1 \\
-\frac{\partial^2 U}{\partial c_i \partial a_i} & \frac{\partial^2 U}{\partial a_i^2} & 0 & -(1-\tau)w_i \\
0 & 0 & -\frac{dp}{de_1} \frac{\partial}{\partial T} \Delta U_2 & -(1-\tau)w_i \\
\frac{\partial e_{1i}}{\partial T} & -1 & -(1-\tau)w_i & 0
\end{array} \\
& \frac{\partial e_{1i}}{\partial T} = \frac{|A|}{|A|} \\
& \frac{\partial e_{1i}}{\partial T} = \frac{\frac{dp}{de_1} \frac{\partial}{\partial T} \Delta U_2 - (1-\tau)w_i \frac{\partial^2 U}{\partial c_i^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial a_i^2} - 2(1-\tau)w_i \frac{\partial^2 U}{\partial c_i \partial a_i}}{|A|} \quad (60)
\end{aligned}$$

Effets d'une augmentation du salaire de l'étudiant

Je dérive le système d'équations initial par le salaire de l'étudiant w_i . J'obtiens :

$$\begin{aligned}
& \frac{\partial^2 U}{\partial c_i^2} \frac{\partial c_i}{\partial w_i} + \frac{\partial^2 U}{\partial c_i \partial a_i} \frac{\partial a_i}{\partial w_i} = \frac{\partial \lambda_i}{\partial w_i} \\
& \frac{\partial^2 U}{\partial a_i^2} \frac{\partial a_i}{\partial w_i} + \frac{\partial^2 U}{\partial c_i \partial a_i} \frac{\partial c_i}{\partial w_i} = (1-\tau)\lambda_i^* + (1-\tau)w_i \frac{\partial \lambda_i}{\partial w_i} \\
& \frac{\partial^2 p}{\partial e_{1i}^2} \frac{\partial e_{1i}}{\partial w_i} \Delta U_2 = (1-\tau)\lambda_i^* + (1-\tau)w_i \frac{\partial \lambda_i}{\partial w_i} \\
& \frac{\partial c_i}{\partial w_i} = -(1-\tau)w_i \frac{\partial e_{1i}}{\partial w_i} + \frac{\partial a_i}{\partial w_i} + (1-\tau)(55 - e_{1i}^* - a_i^*)
\end{aligned}$$

Je peux réécrire le système sous sa forme matricielle :

$$\begin{array}{ccccccc}
\begin{array}{c} \square \\ \square \\ \square \\ \square \\ \square \end{array} & \begin{array}{c} \frac{\partial^2 U}{\partial c_i^2} \\ \frac{\partial^2 U}{\partial c_i \partial a_i} \\ 0 \\ 0 \\ -1 \end{array} & \begin{array}{c} \frac{\partial^2 U}{\partial c_i \partial a_i} \\ \frac{\partial^2 U}{\partial a_i^2} \\ 0 \\ 0 \\ -(1-\tau)w_i \end{array} & \begin{array}{c} 0 \\ 0 \\ -\frac{dp}{de_1} \frac{\partial}{\partial T} \Delta U_2 \\ 0 \\ -(1-\tau)w_i \end{array} & \begin{array}{c} -1 \\ -(1-\tau)w_i \\ -(1-\tau)w_i \\ 0 \\ 0 \end{array} & \begin{array}{c} \frac{\partial c_i}{\partial w_i} \\ \frac{\partial a_i}{\partial w_i} \\ \frac{\partial e_{1i}}{\partial w_i} \\ \frac{\partial \lambda_i}{\partial w_i} \\ -(1-\tau)(55 - e_{1i}^* - a_i^*) \end{array} & \begin{array}{c} 0 \\ (1-\tau)\lambda_i^* \\ (1-\tau)\lambda_i^* \\ i \\ i \end{array} & \begin{array}{c} \square \\ \square \\ \square \\ \square \\ \square \end{array}
\end{array}$$

Je résous avec la méthode de Cramer.

$$\frac{\partial c_i}{\partial w_i} = \frac{\begin{vmatrix} 0 & \frac{\partial^2 U}{\partial c_i \partial a_i} & 0 & -1 \\ (1-\tau)\lambda_i^* & \frac{\partial U}{\partial a_i^2} & 0 & -(1-\tau)w_i \\ (1-\tau)\lambda_i^* & 0 & \frac{d^2 p}{de_1^2} \Delta U_2 & -(1-\tau)w_i \\ -(1-\tau)(55 - e_{1i}^* - a_i^*) & -(1-\tau)w_i & -(1-\tau)w_i & 0 \end{vmatrix}}{|\mathbf{A}|}$$

$$\frac{\partial c_i}{\partial w_i} = \frac{1}{|\mathbf{A}|} (1-\tau) \left((1-\tau)w_i \lambda_i^* \frac{\partial^2 U}{\partial a_i^2} + (1-\tau)w_i \lambda_i^* \frac{\partial^2 p}{\partial e_{1i}^2} \Delta U_2 - (55 - e_{1i}^* - a_i^*) \frac{\partial^2 U}{\partial a_i^2} \frac{\partial^2 p}{\partial e_{1i}^2} \Delta U_2 + (1-\tau)w_i (55 - e_{1i}^* - a_i^*) \frac{\partial^2 U}{\partial c_i \partial a_i} \right) \quad (61)$$

$$\frac{\partial a_i}{\partial w_i} = \frac{\begin{vmatrix} \frac{\partial^2 U}{\partial c_i^2} & 0 & 0 & -1 \\ -\frac{\partial^2 U}{\partial c_i \partial a_i} & (1-\tau)\lambda_i^* & 0 & -(1-\tau)w_i \\ 0 & (1-\tau)\lambda_i^* & \frac{d^2 p}{de_1^2} \Delta U_2 & -(1-\tau)w_i \\ -1 & -(1-\tau)(55 - e_{1i}^* - a_i^*) & -(1-\tau)w_i & 0 \end{vmatrix}}{|\mathbf{A}|}$$

$$\frac{\partial a_i}{\partial w_i} = \frac{-(1-\tau)}{|\mathbf{A}|} \left((1-\tau)w_i \lambda_i^* \frac{\partial^2 U}{\partial c_i \partial a_i} - (55 - e_{1i}^* - a_i^*) \frac{\partial^2 U}{\partial c_i \partial a_i} \frac{d^2 p}{de_1^2} \Delta U_2 + \lambda_i^* \frac{\partial^2 p}{\partial e_{1i}^2} \Delta U_2 + (1-\tau)(55 - e_{1i}^* - a_i^*) \frac{\partial^2 U}{\partial c_i^2} \frac{\partial^2 p}{\partial e_{1i}^2} \Delta U_2 \right) \quad (62)$$

$$\frac{\partial e_{1i}}{\partial w_i} = \frac{\begin{vmatrix} \frac{\partial^2 U}{\partial c_i^2} & \frac{\partial^2 U}{\partial c_i \partial a_i} & 0 & -1 \\ -\frac{\partial^2 U}{\partial c_i \partial a_i} & \frac{\partial U}{\partial a_i^2} & (1-\tau)\lambda_i^* & -(1-\tau)w_i \\ 0 & 0 & (1-\tau)\lambda_i^* & -(1-\tau)w_i \\ -1 & -(1-\tau)w_i & -(1-\tau)(55 - e_{1i}^* - a_i^*) & 0 \end{vmatrix}}{|\mathbf{A}|}$$

$$\frac{\partial e_{1i}}{\partial w_i} = \frac{(1-\tau)}{|\Lambda|} \left[-\lambda_i^* \frac{\partial^2 U}{\partial a_i^2} - (1-\tau) w_i \left((55 - e_{1i}^* - a_i^*) \frac{\partial^2 U}{\partial c_i \partial a_i} + (1-\tau) w_i \lambda_i^* \frac{\partial^2 U}{\partial c_i \partial a_i} \right) \right] \quad (63)$$

Théorème de l'enveloppe

À la définition du problème du gouvernement, j'utilise certains résultats dérivés du théorème de l'enveloppe. Mon objectif est de connaître la variation du bien-être de l'étudiant lorsque les paramètres du programme de prêts et bourses varient à la marge. Le théorème de l'enveloppe stipule que la fonction d'utilité indirecte dérivée par rapport aux paramètres exogènes de l'étudiant est équivalente à la dérivée de la fonction lagrangienne de ce dernier par rapport aux mêmes variables exogènes lorsque les valeurs d'effort, de consommation et de loisir sont à l'optimum. Mathématiquement, cela s'exprime de la manière suivante :

$$\frac{\partial V_i}{\partial y_j} = \frac{\partial L_j}{\partial y_j} \Big|_{c^*, a^*, e_1^*} \quad \forall j \in \{M_1, M_2, \tau, T\}.$$

Ainsi, la première étape est de dériver la fonction de Lagrange de l'étudiant par les variables du programme de prêts et bourses. Pour les étudiants qui travaillent tout en étant admissibles aux bourses (étudiant de type 1), les valeurs sont les suivantes :

$$\frac{\partial V_i}{\partial M_1} = \lambda_i^*, \quad (64)$$

$$\frac{\partial V_i}{\partial M_2} = \lambda_i^* + p(e^*) \frac{\partial U_2((1-T)\bar{W} - M_2)}{\partial M_2} + (1 - p(e^*)) \frac{\partial U_2(W - M_2)}{\partial M_2}, \quad (65)$$

$$\frac{\partial V_i}{\partial \tau} = -\lambda_i^* w_i (55 - a_i^* - e_{1i}^*) \quad \text{et} \quad (66)$$

$$\frac{\partial V_i}{\partial T} = p(e^*) \frac{\partial U_2((1-T)\bar{W} - M_2)}{\partial T}. \quad (67)$$

Je peux simplifier la deuxième expression de la manière suivante :

$$\frac{\partial V_i}{\partial M_2} = \lambda_i^* + p(e^*) \frac{\partial}{\partial M_2} U_2(W - M_2) + \frac{\partial}{\partial M_2} U_2((1 - \tau)W - M_2).$$

Les deux autres types d'étudiants diffèrent par leur admissibilité aux bourses et l'application de la contribution étudiante. Les expressions (65) et (67) demeurent les mêmes. L'étudiant de type 2 ne reçoit pas de bourses. Ce faisant les expressions (64) et (66) deviennent :

$$\frac{\partial V_i}{\partial M_1} = 0 \quad \text{et} \quad (68)$$

$$\frac{\partial V_i}{\partial \tau} = 0. \quad (69)$$

En effet, puisque l'étudiant de type 2 ne reçoit pas de bourses, son bien-être n'est pas influencé par une variation du montant de bourses ou du taux de contribution étudiante. Pour l'étudiant de type 3 qui ne travaille pas, l'expression (64) demeure la même que l'étudiant de type 1. Or, ce dernier ne travaille pas. Le niveau de sa contribution étudiante est nulle. Il reçoit le montant maximal de bourses. Ainsi, l'expression (66) devient :

$$\frac{\partial V_i}{\partial \tau} = 0. \quad (70)$$

Ces expressions montrent comment le bien-être de l'étudiant change selon un changement aux variables exogènes.

Il est possible de voir que l'effet d'une variation marginale de la bourse sur le bien-être de l'étudiant sera toujours plus grande que l'effet d'une variation du prêt. La proposition 5 en fait état plus haut. Pour s'en convaincre, j'utilise la version longue de l'expression $\frac{\partial V_i}{\partial M_2}$:

$$\lambda_i^* + [1 - p(e^*)] \frac{\partial}{\partial M_2} U_2(W - M_2) + p(e^*) \frac{\partial}{\partial M_2} U_2((1 - \tau)W - M_2).$$

Comme la dérivée de U_2 par rapport au prêt est toujours négative, à la fois pour le diplômé et le non-diplômé, les deux termes seront toujours négatifs. Ainsi, ce qui accompagne λ_i^* dans la variation de l'utilité de l'étudiant suite à une augmentation du

prêt est négatif. Le prêt diminue l'utilité à la seconde période, à la fois pour le diplômé et le non-diplômé. En comparaison, la bourse n'exigeant pas de repaiement n'influence pas directement le bien-être à la seconde période.

Conditions de premier ordre du problème du gouvernement selon une posture rawlsienne

Dans ce cas précis la fonction de Lagrange du gouvernement devient :

$$L_p = \min(U_1^*, U_2^*, U_3^*, \dots, U_n^*) + \Phi \left(\sum_{i=1}^n (p(e_{1i}^*) T \bar{W} + \tau w_i (1 - e_{1i}^* - a_i^*)) - \frac{G}{n} - M_{1i} \right). \quad (71)$$

Les conditions de premier ordre d'une fonction rawlsienne deviennent :

$$\begin{aligned} & \frac{\partial \min(U_1^*, U_2^*, U_3^*, \dots, U_n^*)}{\partial \tau} \\ &= - \sum_{i=1}^n \left[\frac{\partial e_{1i}^*}{\partial \tau} \left(\frac{dp}{de_{1i}} T \bar{W} - \tau w_i \right) + w_i (1 - e_{1i}^* - a_i^*) - \frac{\partial a_i^*}{\partial \tau} \tau w_i \right], \quad (72) \end{aligned}$$

Variation du bien-être

Effet induit : effort Effet mécanique Effet induit : loisir

$$\begin{aligned} & \frac{\partial \min(U_1^*, U_2^*, U_3^*, \dots, U_n^*)}{\partial t} \\ &= - \sum_{i=1}^n \left[\frac{\partial a_i^*}{\partial T} \left(\frac{dp}{de_{1i}} T \bar{W} - \tau w_i \right) + p(e_{1i}^*) W - \frac{\partial a_i^*}{\partial T} \tau w_i \right], \quad (73) \end{aligned}$$

Variation du bien-être

Effet induit : effort Effet mécanique Effet induit : loisir

$$\begin{aligned}
& \text{Variation du bien-être} \\
& \frac{\partial \min(U^*, U^*, U^*, \dots, U^*)}{\partial M_1} \Big|_{\Phi} \\
& = - \sum_{i=1}^n \frac{\partial e_{1i}^*}{\partial M_1} \left(\frac{dp}{de_{1i}} TW - \tau w_i \right) - \frac{\partial a_i}{\partial M_1} \tau w_i - \frac{\partial \tau}{\partial M_1} \tau w_i \Big|_{\Phi}, \quad (74)
\end{aligned}$$

Effet induit : effort
Effet induit : loisir
Effet mécanique

$$\begin{aligned}
& \text{Variation du bien-être} \\
& \frac{\partial \min(U^*, U^*, U^*, \dots, U^*)}{\partial M_2} \Big|_{\Phi} \\
& = - \sum_{i=1}^n \left[\frac{\partial e_{1i}^*}{\partial M_2} \left(\frac{dp}{de_{1i}} TW - \tau w_i \right) - \frac{\partial a_i}{\partial M_2} \tau w_i \right] \Big|_{\Phi}, \quad (75)
\end{aligned}$$

Effet induit : effort
Effet induit : loisir

$$\begin{aligned}
& \text{Impôt} \quad \text{Autres dépenses fiscales} \\
& \sum_{i=1}^n \left(p(e_{1i}^*) TW - \frac{G}{n} \right) + \sum_{i=1}^n \left(\tau w_i (1 - e_{1i}^* - a_i^*) - \frac{M_1}{n} \right) = 0. \quad (76)
\end{aligned}$$

Contribution étudiante
Dépenses de bourses

Conditions de premier ordre du problème du gouvernement selon une posture souhaitant maximiser la réussite

La fonction de Lagrange du gouvernement devient :

$$L = \sum_{i=1}^n (p(e_{1i}^*)) + \Phi \left(\sum_{i=1}^n (p(e_{1i}^*) TW + \tau w_i (1 - e_{1i}^* - a_i^*) - \frac{G}{n} - M_1) \right). \quad (77)$$

Les conditions de premier ordre sont les suivantes :

$$\begin{aligned}
& \sum_{i=1}^n \left(\frac{dp}{de_{1i}} \frac{\partial e_{1i}}{\partial \tau} \right) \Big|_{\Phi} = - \sum_{i=1}^n \left[\frac{\partial e_{1i}}{\partial \tau} \left(\frac{dp}{de_{1i}} TW - \tau w_i \right) + \frac{\partial \tau}{\partial \tau} w_i (1 - e_{1i}^* - a_i^*) - \frac{\partial a_i}{\partial \tau} \tau w_i \right] \Big|_{\Phi} \quad (78)
\end{aligned}$$

Effet induit : effort
Effet mécanique
Effet induit : loisir

$$\frac{\sum_{i=1}^n \left(\frac{dp}{de_{1i}} \frac{\partial e_{1i}}{\partial T} \right)}{\phi} = - \sum_{i=1}^n \left[\frac{\partial e_{1i}^*}{\partial T} \left(\frac{dp}{de_{1i}} \tau \bar{W} - \tau w_i \right) + \frac{p(e_{1i}^*)}{p(e_{1i}^*)} \bar{W} - \frac{\partial a_i}{\partial T} \tau w_i \right] \quad (79)$$

$$\frac{\sum_{i=1}^n \left(\frac{dp}{de_{1i}} \frac{\partial e_{1i}}{\partial M_1} \right)}{\phi} = - \sum_{i=1}^n \left[\frac{\partial e_{1i}^*}{\partial M_1} \left(\frac{dp}{de_{1i}} \tau \bar{W} - \tau w_i \right) - \frac{\partial a_i}{\partial M_1} \tau w_i - \frac{1}{1} \right], \quad (80)$$

$$\frac{\sum_{i=1}^n \left(\frac{dp}{de_{1i}} \frac{\partial e_{1i}}{\partial M_2} \right)}{\phi} = - \sum_{i=1}^n \left[\frac{\partial e_{1i}^*}{\partial M_2} \left(\frac{dp}{de_{1i}} \tau \bar{W} - \tau w_i \right) - \frac{\partial a_i}{\partial M_2} \tau w_i \right], \quad (81)$$

$$\sum_{i=1}^n \left(p(e_{1i}^*) \tau \bar{W} - \frac{G}{n} \right) + \sum_{i=1}^n \left(\tau w_i (1 - e_{1i}^* - a_i^*) - \frac{M_1}{M_1} \right) = 0. \quad (82)$$

Programme informatique python

```

1  import numpy as np
2  from scipy.optimize import minimize, differential_evolution, Bounds, NonlinearConstraint
3  from scipy.stats import norm
4  import os
5  import matplotlib.pyplot as plt
6  from matplotlib.lines import Line2D
7  from matplotlib.patches import Patch
8  import matplotlib.gridspec as gridspec
9  import time
10 from itertools import product
11 import smtplib
12 from email.message import EmailMessage
13
14
15 start = time.time()# petite routine pas liée au programme qui me permet de connaître le temps de
calcul du programme
16
17 """Définition des variables :
18 x = [x[0] = consommation ($/semaine), x[1] = loisir (heures/semaine), x[2] =
études(heures/semaine)]
19 y= [y[0]=bourses ($/semaine), y[1]=prêt ($/semaine), y[2]=taux de contribution étudiante, y[3]=
taux d'imposition sur le revenu]
20 w= [w[0]= salaire du non-diplômé(hebdomadairement), w[1] = salaire du diplômé (hebdomadairement)]
21 g = autres dépenses du gouvernement
22 c_min = consommation minimale de l'étudiant (dépenses de bases)
23 *La semaine compte 50 heures au total ce qui explique que la contrainte budgétaire de l'étudiant
s'exprime de la sorte (1-y[2])*w[0]*(50-x[2]-x[1]) + y[0] + y[1] - x[0]
24 rho : posture du gouvernement face aux inégalités. rho = 0 : gouvernement utilitariste. rho =
hautes valeurs (ex: 50) : gouvernement rawlsien.
25 """
26
27 """
28 3 petites questions à répondre d'entrée de jeu.
29 """
30
31 print("commentaire simul :seuil revenu : 375$. N = 50, seed du DE = 23. Popsiz =20, Mutation =
(0.5, 1.90). The tol value is the default 0.1. Enlarged trust region" )
32 fonction_choix_social = input("Fonction de choix social, utilitariste (u) , rawlsien(r)
maximisateur de réussite (s) : ")
33 rho_gouvernement = float(input("Quel est le rho (exposant du gouvernement)? Plus le rho est
grand , plus le gouvernement souhaite la redistribution. Lors que rho est égal à 0 \
le gouvernement est utilitariste. Si le gouvernement maximise la diplomation
(fonction_choix_social = s), rho n'a pas d'importance : "))
34
35 def repertoire():
36     if fonction_choix_social == 'u':
37         i = 'utilitarisme'
38     elif fonction_choix_social == 'r':
39         i = "rawls"
40     elif fonction_choix_social == "s":
41         i = "reussite"
42     return i
43 w = [750, 1300]#vecteur de salaire de départ des non-diplômés et des diplômés.
44 SEUIL_REVENU = 375
45 CONSO_MIN = 290
46 K_BOURSE = 0.05
47 K_SEUIL = 0.05
48 RATIO_NON_EMPLOI = 0.25 # ratios d'étudiant qui ne travaillent pas durant leur études
49 #seuils pour algorithme slsqp
50 FTOL_ETUDIANT = 1e-7
51 FTOL_GOUV = FTOL_ETUDIANT * 1e1 # = 1e-6, jamais plus strict que l'étudiant
52 EPS_GOUV = 0.01
53 SCALES = np.array([250, 250, 0.75, 1 - w[0]/w[1]])
54 LOWER = np.array([100.0, 80, 0.50, 0.10])
55
56 def unscale(y_norm):

```


[illegible]

15.466750075503812, 15.485977842553552, 15.489203901934879, 15.48960124986083,
15.492918723620567, 15.495360475554191, 15.495547858241338, 15.496613669479357,
15.496826518870233, 15.503652905224238, 15.508578711368752, 15.51123310111905, 15.528069618203288
, 15.534386427865993, 15.536269515995262, 15.54292300697715, 15.545088658356168,
15.551568530348895, 15.554177352347832, 15.573579133136262, 15.574999728448523,
15.577540147646873, 15.579871606988934, 15.591672728086824, 15.596321252720541,
15.604847579100658, 15.606982476493965, 15.607760820201293, 15.608273124543736, 15.60982330364022
, 15.61165087451312, 15.61714733965521, 15.618038703078192, 15.634437407168342,
15.635766403452498, 15.636427070084817, 15.641410117448753, 15.642181785855614,
15.646616823689955, 15.658768392151522, 15.667741671076646, 15.683920885103124,
15.686124436810596, 15.690234140255653, 15.696772189408447, 15.699198864595054,
15.700337427991684, 15.701223858939985, 15.706220097291009, 15.708145418011567, 15.72166934145798
, 15.726883044752444, 15.731646087308505, 15.743810261496376, 15.744210626240191,
15.748511263588611, 15.748644542872395, 15.751074832288875, 15.758756015153176,
15.759521452439387, 15.766192445178213, 15.782619600181508, 15.784273946061308,
15.790710393967437, 15.80090592816448, 15.80098185329321, 15.821253029552203, 15.829977400574442,
15.830556538480355, 15.84251682353684, 15.856813275743823, 15.872037186966637,
15.898287539838243, 15.90809465579712, 15.918301398796576, 15.919515253868616, 15.928475438452836
, 15.93249031458116, 15.958049337345193, 15.95866948770385, 15.961221616646702,
15.963851433816593, 15.965124624887046, 15.97923190032315, 15.983609565349719, 15.98635050629081,
15.987881788772803, 15.989322559824172, 15.99783980310466, 15.998228071831123, 16.00898711030967
, 16.031090526304727, 16.03818055565969, 16.048082912759654, 16.06980429427717, 16.09246182092088
, 16.09498589263618, 16.105119500483752, 16.125654079003105, 16.127982677261063,
16.129878415602693, 16.142790162183903, 16.15199960825431, 16.156143033789146, 16.15654993807514,
16.157569098707192, 16.161933906283185, 16.178179102357518, 16.186055614169693,
16.199719466497847, 16.208231133902327, 16.211318953000895, 16.213141079331393,
16.219626035651153, 16.221364237842565, 16.224700840993474, 16.2355505849119, 16.245551162954424,
16.26598136165326, 16.29243676363324, 16.296156523988405, 16.303435042084235, 16.31131488790557,
16.330020766724235, 16.33559179231556, 16.33620893228637, 16.352999968872577, 16.385975419710796
, 16.41651230004029, 16.418930438336726, 16.421281293400614, 16.423958867461256,
16.43375912499647, 16.434166659635064, 16.4392603215004, 16.44503926973502, 16.445260335325706,
16.461553954256445, 16.46382901898288, 16.468138438620993, 16.479760910911427, 16.486655752596313
, 16.49421736597231, 16.496031539945346, 16.50903090956997, 16.52040732603959, 16.527912684225797
, 16.528287150108383, 16.53806869442001, 16.541209956003673, 16.543482158978303,
16.54652154499809, 16.560714977186002, 16.574052334605188, 16.579678194464837, 16.580775883751215
, 16.591897114757618, 16.602168703129113, 16.607303367883546, 16.611988068684564,
16.612358741371064, 16.628617668728154, 16.662132869200075, 16.665796446910143,
16.670137231339524, 16.675100559615256, 16.68933193562564, 16.70317452315653, 16.704243822406987,
16.743974117366683, 16.744329139569345, 16.748239797067143, 16.75029246635416,
16.758530751940476, 16.76687818590766, 16.79291328490089, 16.815690837999306, 16.82238343413293,
16.824621993047707, 16.838166335980812, 16.859079341215004, 16.864244211682625,
16.873353712422592, 16.920568134234934, 16.948194183840563, 16.971571688931036,
16.987766863348114, 17.003356922718154, 17.01038016069232, 17.01303891239658, 17.017321810004454,
17.027398246549097, 17.041667732177864, 17.06171416416778, 17.06436791067389, 17.066363210942423
, 17.068952139462, 17.070689138856505, 17.09852928310597, 17.12838352117298, 17.13282849373485,
17.136639469901503, 17.136756551539033, 17.1531794810955, 17.15638776696082, 17.168438479198947,
17.16851463410847, 17.21230256052903, 17.24020658117064, 17.240230756658782, 17.252068520040936,
17.270386196873048, 17.299262903988357, 17.30736174212775, 17.317880688233302, 17.32920558713761,
17.36075963501921, 17.366698691713204, 17.39057514788996, 17.39100539992831, 17.398771192316197,
17.450812052854854, 17.468483703415682, 17.484730083486475, 17.49187261468463, 17.50978734332579
, 17.522180335654003, 17.53248711645779, 17.54142863866513, 17.547754504889184, 17.56969856526771
, 17.59214156293345, 17.59612583821619, 17.59696588410483, 17.614892863772724, 17.628799945070156
, 17.64276838138823, 17.66076592313367, 17.67348451916293, 17.712176231617548, 17.752909509576128
, 17.75862491210997, 17.773385501879645, 17.80589724035558, 17.8070992369854, 17.816906792258347,
17.869732006209773, 17.881225973111434, 17.90652311230834, 17.917850441274187,
17.921891058016097, 17.941691409994185, 17.959550172740926, 17.991103869811962,
17.992787248651954, 18.013202731550063, 18.04262188343527, 18.049523933441872, 18.09823147592668,
18.154723968633853, 18.17838190720153, 18.218954366150324, 18.222449464026436, 18.22631754472422
, 18.254915276387216, 18.280528282411908, 18.299419169312912, 18.30251777469523,
18.303594245262655, 18.31779150154888, 18.35175404453433, 18.352841930198174, 18.36793133745308,
18.391344321239693, 18.400799185321542, 18.441761406160694, 18.443866315778276, 18.47805257580363
, 18.493869515950117, 18.54487160653075, 18.572293228715758, 18.577542484404507,
18.65444329034842, 18.68489345798222, 18.687662113646716, 18.726171930223064, 18.733333673789936,
18.735684844014155, 18.743218566588148, 18.75017713805191, 18.754130048155552, 18.78522401921009
, 18.7942377917437, 18.79689954073529, 18.852799805256673, 18.874315150952242, 18.891967639974943

```

28.410796050831088, 28.490704602971114, 28.53864672200901, 28.594273818948146,
28.813096320313143, 28.94644290778616, 29.04811405324474, 29.124351629417305, 29.45281593455997,
29.809811810728615, 30.055150355938146, 30.74135353711494, 31.07571219304577, 31.092773062069398,
31.274556198554105, 31.494729274200672, 32.0943025426538, 32.35912605446079, 32.43391638540935,
32.45771002802044, 32.49191855976569, 32.79797559043908, 32.8100482067065, 32.855629020554495,
33.29587822238261, 33.47424478512943, 33.59461943230325, 33.6429683766366, 33.77823587505134,
33.817644888924775, 33.97815502462903, 34.01816585403448, 34.5461161647512, 34.718739967854205,
35.00694300008351, 35.00953265312627, 35.05836510378022, 35.08973131315596, 35.91036011900795,
36.0998477891832, 36.128449543903294, 36.60836002325423, 37.0281695095845, 37.16605847464306,
37.3160583724611, 37.493547527208875, 37.91725524877817, 38.15247617696451, 38.19111473037442,
38.62386644029627, 38.905304892671424, 39.14142907443589, 39.370964982896666, 39.62551894476296,
40.431993322750216, 40.72045781149231, 40.83696151288072, 41.14922145783147, 41.98009084713848,
42.106542623737454, 42.600726519746786, 43.15723160319703, 43.73437682775903, 44.487315602959576,
44.500408298599226, 44.66014861402054, 44.79437354780377, 44.93813108735152, 45.46024524216942,
46.40621285407601, 46.57193699672774, 46.9257042171875, 47.37151878622738, 47.57261530824518,
49.1296426096563, 49.796198346921194]
80 print(len(w_etu))
81 def depense_fixe() : # fonction qui me donne les autres dépenses fiscales en fonction du nombre
d'étudiant dans ma simulation. Elle est appelée plus tard dans le problème du gouvernement. Elle
multiplie le nombre d'étudiant par un facteur 5.
82     return len(w_etu)*150
83
84 class etudiant() : #Problème de l'étudiant
85     def __init__(self, w_etu, y_gouv) : # je définis ici quelques paramètres affectant la
fonction d'utilité de l'étudiant
86         self.alpha = 0.46 #puissance du loisir
87         self.beta = 0.15 #puissance de la consommation
88         self.sigma = 0.30 #puissance du revenu net à la deuxième période
89         self.c_min = CONSO_MIN # conso minimum
90         self.gamma = 11 #facteur relevant l'importance de la période 2 dans le calcul de
l'utilité 13,5 lorsque smaine = 45 et 9,5 lorsque semaine = 50
91         self.semaine = 55 #heures par semaine
92         self.w_etu = w_etu #salaire de l'étudiant
93         self.x_opt = 0 #stockage de la solution optimale de l'étudiant
94         self.seuil_revenu = SEUIL_REVENU
95         self.sous = False # True si fait partie du groupe d'étudiants qui ne travaillent aucune
heure
96         self.sup = False #True si fait partie du groupe d'étudiant qui gagne un revenu trop
grand pour être admissible aux prêts et bourses
97         self.bourse = y_gouv[0]
98         self.pret = y_gouv[1]
99         self.tau = y_gouv[2]
100        self.taxe = y_gouv[3]
101        self.effective_bourse = 0
102        self.split()
103        self.solution_minimize()
104        self.succ = True
105    def split(self) : #fonction qui répartit les étudiants dans les groupes selon la
participation au régime de prêts et bourses ou non.
106        if self.w_etu == 0 : #premier groupe : 25 % des étudiants qui ne travaillent pas
107            self.sous=True
108        else :
109            pass
110    def probabilite(self, x, prime = 0) : # La fonction de probabilité de réussite détermine la
probabilité que l'étudiant décroche son diplôme E [0,1] en fonction du nombre d'heures
hebdomadaire consacré aux études (x[2]) (intran). Cette probabilité est modélisée à l'aide
de la fonction de probabilité cumulative d'une distribution normale.
111        if prime == 0 :
112            f = 1 - np.exp(-x[2]/20)
113        elif prime == 1 :
114            f = 1/20*np.exp(-x[2]/ 20)
115        return f
116    def utilite(self, x, prime = 0) : # Il s'agit de la fonction d'utilité de l'étudiant. Je
l'ai écrit en deux parties. D'abord, il y a deux fonctions séparables indiquant l'utilité
tirée de la consommation (x[0]) et du loisir(x[1]). Ensuite la fonction indiquant l'utilité

```

tiré de l'effort (x[2]) et de la diplomation.

```
117     if prime == 0 :
118         u1 = ((x[0]-self.c_min)**(self.beta))*(x[1]**(self.alpha))
119         u2 = self.probabilite(x)*((1-self.taxe)*w[1]- self.pret)**self.sigma + (1-self.
120             probabilite(x))*(w[0]- self.pret)**self.sigma
121         total = (u1 + self.gamma*u2)
122     elif prime == 1 : #renvoie un vecteur des dérivées partielles de l'utilité selon la
123         consommation ,Le loisir et Les études.
124         u_c = self.beta * (x[0] - self.c_min)**(self.beta-1) * x[1]**(self.alpha)
125         u_a = self.alpha * x[1] ** (self.alpha -1)* (x[0]-self.c_min)**(self.beta)
126         u_e = self.probabilite(x, prime = 1)* (((1-self.taxe)*w[1]- self.pret)**self.sigma -
127             (w[0]- self.pret)**self.sigma)
128         total = [u_c, u_a, self.gamma*u_e]
129     elif prime ==2 : #renvoie les dérivées secondes de l'utilité
130         u_2c = self.beta*(self.beta -1)*(x[0]- self.c_min)**(self.beta -2)* x[1]**(self.alpha
131             )
132         u_2a = self.alpha*(self.alpha -1)*x[1]**(self.alpha -2)*(x[0]-self.c_min)**(self.beta
133             )
134         u_2e = self.probabilite(x, prime =2)*(((1-self.taxe)*w[1]- self.pret)**self.sigma - (
135             w[0]- self.pret)**self.sigma)
136         u_2ca = self.alpha * x[1] ** (self.alpha -1)*self.beta * (x[0] - self.c_min)**(self.
137             beta-1)
138         total = [[u_2c,u_2ca,0], [u_2ca,u_2a,0], [0,0,u_2e]]
139     return total
140
141 def contrainte (self,x, prime = 0): #La contrainte budgétaire de l'étudiant qui considère
142     une semaine de 50 heures que l'étudiant peut consacrer au travail au loisir (x[1]) ou aux
143     études(x[2]). Ses revenus sont complétés par uen portion prêt (y[1]) et une portion bourse
144     (y[0]). Enfin, il dépense son niveau de consommation (x[0]).
145     if prime == 0 :
146         if self.sous : #étudiant qui ne travaille pas et qui sont admissibles aux bourses
147             eff_bourse = self.bourse
148             f =eff_bourse +self.pret -x[0]
149         elif self.w_etu*(self.semaine - x[2]- x[1])> self.seuil_revenu : # étudiant qui
150             travaille et non-admissible aux prêts et bourse
151             #self.sup = True
152             eff_bourse = 0
153             f = self.w_etu*(self.semaine-x[2]-x[1]) +self.pret -x[0]
154         else :#étudiants qui travaillent et qui sont admissibles aux bourses
155             #self.sup = False
156             heures_travail = self.semaine - x[2]- x[1]
157
158             if self.w_etu*heures_travail > self.seuil_revenu :
159                 print("Problème : dépassement de la contrainte du seuil de revenu pour un
160                     travailleur admissible au bourse")
161             eff_bourse = self.bourse - self.tau*self.w_etu*heures_travail
162             if eff_bourse < 0 : #manoeuvre faisant en sorte que la quantité de bourses que
163                 l'étudiant reçoit ne peut être plus petite que sa contribution étudiante
164                 nominale.
165                 eff_bourse = 0
166             else :
167                 pass
168             f = self.w_etu*(self.semaine-x[2]-x[1]) + eff_bourse +self.pret -x[0]
169
170     elif prime ==1 : #dérivées partielles de la contrainte budgétaire selon la consommation,
171         Le loisir et Les études.
172         if self.sous :
173             c_c = -1
174             c_a = 0
175             c_e = 0
176         elif self.w_etu*(self.semaine - x[2]- x[1])> self.seuil_revenu :
177             c_c = -1
178             c_a = -self.w_etu
179             c_e = -self.w_etu
```

```

166         else :
167             c_c = -1
168             c_a = -(1-self.tau)*self.w_etu
169             c_e = -(1-self.tau)*self.w_etu
170             f = [c_c, c_a, c_e]
171         return f
172
173     def _calc_eff_bourse(self, x):
174         #Calcule la bourse effective pour un x donné, sans effet de bord
175         if self.sous:
176             return self.bourse
177         elif self.w_etu * (self.semaine - x[2] - x[1]) > self.seuil_revenu:
178             return 0
179         else:
180             heures_travail = self.semaine - x[2] - x[1]
181             return max(0, self.bourse - self.tau * self.w_etu * heures_travail)
182
183
184     def solution_minimize(self, warm_start = None):# La résolution du problème de l'étudiant
avec scipy.optimize.minimize et l'algorithme slsqp. Ses arguments sont les instruments de la
politique d'aide financière (y) et les salaires (w) Je définis deux fonction lambda pour
l'utilité et la contrainte. Enfin la fonction retourne le résultat de l'optimisation. Je
stock le résultat dans self.x_opt de l'objet étudiant.
185         x0 = np.array([self.c_min + 0.001, 30.1, 15.1]) # point initial par défaut
186         util_reduit = lambda x: -1*self.utilite(x)#facteur -1 pour le problème de minimisation
187         contr_reduit = lambda x: self.contrainte(x)
188         contr_temps = lambda x: self.semaine - x[2] - x[1]
189         jac_util_reduit = lambda x: [-1*i for i in self.utilite(x, prime =1)]
190         jac_cont_reduit = lambda x: self.contrainte(x, prime =1)
191         dictio_contrainte = [{"type": "ineq", "fun": contr_reduit, "jac": jac_cont_reduit}, {"
192             "type": "ineq", "fun": contr_temps}]
193         dictio_contrainte_type3 = [{"type": "ineq", "fun": contr_reduit}, {"type": "ineq",
194             "fun": contr_temps}]
195         limites = ((self.c_min + 0.0001, None), (0, self.semaine- 0.0001), (0, self.semaine-
196             0.0001))
197         if self.w_etu == 0:
198             solution = minimize(util_reduit, x0, jac= jac_util_reduit, method = "SLSQP", bounds =
199                 limites, constraints = dictio_contrainte_type3, options = {"ftol": FTOL_ETUDIANT,
200                     'maxiter' : 2000})
201         else :
202             solution = minimize(util_reduit, x0, jac= jac_util_reduit, method = "SLSQP", bounds =
203                 limites, constraints = dictio_contrainte, options = {"ftol": FTOL_ETUDIANT, 'maxiter'
204                     : 2000}) # , options = {'disp' : True} options = {"maxiter" : 1000, 'disp' :
205                 True} , jac = jac_util_reduit
206
207         self.x_opt = solution.x
208         succ = solution.success
209         self.effective_bourse = self._calc_eff_bourse(self.x_opt)
210         if succ == False :
211             print(solution.message,solution.x, (self.bourse, self.pret, self.tau, self.taxe),
212                 self.w_etu)
213             pass
214         else :
215             pass
216         self.succ = succ
217
218     def util_indirect (self): #renvoie l'utilité de l'étudiant à l'optimum. Il ne prend aucun
argument mais nécessite d'avoir en stock les valeurs de consommation de loisir et d'étude à
l'optimum.
219         if self.succ == False :
220             u = max(1e-6, self.utilite(self.x_opt) * 0.99)
221
222         else :
223             u = self.utilite(self.x_opt)
224         return u
225
226     def update_solve(self,y_gouv) :

```

```

216         self.bourse = y_gouv[0]
217         self.pret     = y_gouv[1]
218         self.tau      = y_gouv[2]
219         self.taxe     = y_gouv[3]
220         self.sup = False
221         self.split()
222         self.solution_minimize(warm_start=self.x_opt)
223
224     pol1 = [146.24417754, 146.90484053, 0.73467528, 0.23501538]
225     pol2 = [117.97759082, 184.68078446, 0.68294437, 0.22204932]
226     pol = [pol1, pol2]
227     for i in pol :
228         somme = 0
229         count = 0
230         for j in w_etu:
231             if j == 0.0:
232                 count +=1
233                 stout= etudiant(j, i)
234                 somme +=stout.x_opt[2]
235         print(somme/count)
236     g = depense_fixe() # G sont Les dépenses du gouvernement non-attribuée aux prêts et bourses.
237     rho = rho_gouvernement #préférence du gouvernement eu égard à La redistribution
238     social = fonction_choix_social  #(utilitariste, rawlsienne, ou maximisant La réussite)
239
240     class gouvernement(): #Une classe qui exécute Le problème du gouvernement. L'unique argument
qu'elle utilise est Le "initial guess" dont requiert L'algorithme d'optimisation.
241     def __init__(self, initial) :
242         self.rho = rho
243         self.g = g
244         self.social = social
245         self.initial = initial
246         self.c_min = CONSO_MIN
247         self.opt = 0
248         self.success = False
249         self.students = [etudiant(w, [0,0,0,0]) for w in w_etu]
250         self.last_y_evaluated = None
251         #self.pol_opti()
252         self.somme_type1 = 0
253         self.somme_type2 = 0
254         self.somme_type3 = 0
255         self.somme_groupe1 = 0
256         self.somme_groupe2 = 0
257         self.somme_groupe3 = 0
258     def update_all_students(self, y_gouv): #Petite fonction qui fait en sorte que je ne calcule
pas deux fois Les objets étudiants pour l'utilité sociale et la contrainte budgétaire. Le
programme recycle si y_gouv ets Le même que précédemment.
259         if self.last_y_evaluated is not None and np.array_equal(y_gouv, self.last_y_evaluated):
260             return
261         for s in self.students:
262             s.update_solve(y_gouv)
263             if s.w_etu*(s.semaine - s.x_opt[2]- s.x_opt[1])> s.seuil_revenu :
264                 s.sup= True
265             self.last_y_evaluated = np.copy(y_gouv)
266     def utilite_sociale(self, y_gouv, prime = 0): # La fonction d'utilité sociale est une
fonction de y_gouv([bourse, prêt, contribution, impôt]) uniquement. Si La fonction de choix
social est utilitariste ou rawlsienne, l'utiité sociale fait La somme de l'utilité dans La
société à La puissance(1-rho). Si La fonction de choix social est celle maximisant La
réussite l'utilité sociale fait La somme des probabilité de réussir dans La société. Enfin,
on multiplie par un facteur -1 pour La minimisation. Enfin prime indique L'ordre de La
dérivée, Si prime = 0 on prend La valeur de l'utilité, si on prend prime = 1, on prend La
valeur de La dérivée de l'utilité.
267         somme = 0
268         self.update_all_students(y_gouv)
269         if self.social == 's': #Le gouvernement maximise La réussite scolaire
270             if prime == 0 :

```



```

271         for i in self.students :
272             if i.succ is False : #pour décourager les solutions qui contiennent des
                                     étudiants qui ne parviennent pas à converger.
273                 somme += 1e-4
274             else :
275                 somme += i.probabilite(i.x_opt)
276         total = (somme)
277
278     elif self.social == 'u' : # Le gouvernement maximise l'utilité sociale
279         if prime == 0 :
280             n = len(w_etu)
281             for i in self.students :
282                 u_floor = 1e-4
283                 somme += max(u_floor, i.util_indirect()**(1 - self.rho))
284             total = ((somme)**(1/(1-self.rho))) #la division par n fait en sorte que les
                                     valeurs de ma fonction d'utilité ne soit pas trop grande. Cela causait un
                                     problème de convergence lors de l'optimisation.
                                     #print (total)
285
286
287
288     elif self.social == "r" :
289         if prime == 0 :
290             list_utilite = [i.utilite(i.x_opt) for i in self.students]
291
292             #for i in self.students :
293                 # n = len(w_etu)
294                 # somme += i.util_indirect()**(1- self.rho)
295             total = min(list_utilite) #((somme)**(1/(1-self.rho)))
296
297         welfare = total
298         return welfare
299
300 def contrainte_gouv(self, y_gouv, prime = 0): # Pour chacun des étudiants, je calcule ses
variables c, a, e et lambda (lagrange) à l'optimum et cela me permet de calculer sa
contribution étudiante et sa contribution par le biais de l'impôt sur le revenu
301
302     total = 0
303     self.update_all_students(y_gouv)
304     if self.social in ('s', 'r') :
305         if prime == 0 :
306             somme_taxe = 0
307             somme_effective_bourse = 0
308             n = len(w_etu)
309             #print(n_bourse)
310             for i in self.students :
311                 c,a,e = i.x_opt
312                 if i.w_etu*(i.semaine - a - e)< i.seuil_revenu :
313                     #print(i.effective_bourse)
314                     somme_effective_bourse += i.effective_bourse
315                     somme_taxe += i.probabilite([c,a,e])*y_gouv[3]*w[1]
316                 total = (somme_taxe - self.g - somme_effective_bourse) -1e-3
317
318     elif self.social == 'u' :
319         if prime == 0 :
320             somme_taxe = 0
321             n = len(w_etu)
322             somme_effective_bourse = 0
323             for i in self.students :
324                 c,a,e = i.x_opt
325                 #print((i.semaine - a -e)*i.w_etu - i.seuil_revenu)
326                 somme_effective_bourse += i.effective_bourse
327                 somme_taxe += i.probabilite([c,a,e])*y_gouv[3]*w[1]
328             total = (somme_taxe - self.g - somme_effective_bourse) - 1e-3
329
330         return total
331
332 def pol_opti(self): # Cette fonction trouve le résultat d'optimisation du problème du

```

gouvernement dans l'objet self.opt. Comme au problème de L'étudiant, L'on doit appeler (.x) pour avoir seulement les arguments (M1, M2, tau et T) maximisant la fonction d'utilité sociale.

```

331     n = len(w_etu)
332     objectif = lambda y_norm: - 1/n* self.utilite_sociale(unscale(y_norm))
333     contrainte = lambda y_norm: 1/n* self.contraainte_gouv(unscale(y_norm))
334     NLC = NonlinearConstraint(contrainte, 0, 2000)
335     faisabilite_contrainte = NonlinearConstraint(
336         lambda y_norm: unscale(y_norm)[0] + unscale(y_norm)[1],
337         lb=self.c_min, ub=500)
338     limite_scaled = Bounds([0,0,0,0],[1,1,1,1])
339     initial_norm = scale(np.array(self.initial))
340     print("Constraint value at initial:", self.contraainte_gouv(self.initial)*1/n)
341     constraint_dict = [{"type": "ineq", "fun": contrainte}]#, {'type' : "ineq", "fun" :
        contraainte_2}
342     result = differential_evolution(
343         objectif,
344         bounds=[(0,1),(0,1),(0,1),(0,1)],
345         constraints=[NLC, faisabilite_contrainte],
346         maxiter=500,
347         #tol=1e-4,
348         seed=41,
349         disp=True,
350         workers=1,
351         callback = callback,
352         popsize = 20, #best_popsize =12
353         mutation = (0.5,1.90)
354     )
355     success = result.success
356     result = unscale(result.x)
357     self.opt = result
358     self.success = success
359
360
361 def test_student():
362     for i in [[132.02041228, 160.21633273, 0.73723863, 0.22401244], [118.94175005, 178.02145652 ,
        0.73031273 , 0.21901873]] :
363         print(i)
364         list_a = []
365         list_e = []
366         #gov = gouvernement(i)
367         #print("contraainte : " + str(gov.contraainte_gouv(i)))
368         for j in w_etu :
369             etu = etudiant(j, i)
370             c,a,e = etu.x_opt
371             print(etu.utilite(etu.x_opt), etu.x_opt, etu.effective_bourse, etu.w_etu, etu.succ)
372             list_a.append(a)
373             if etu.w_etu*(etu.semaine - a - e)> etu.seuil_revenu :
374                 print ("yaio")
375             list_e.append(e)
376         print("La moyenne du loisir est de : "+ str(np.average(list_a)))
377         print("La moyenne d'étude est de : "+ str(np.average(list_e)))
378
379
380 [130, 161, 0.5, 0.3], [151, 150, 0.4, 0.3], [100, 200, 0.4, 0.34], [0.1, 300, 0.4, 0.3],[181, 110
, 0.68, 0.29], [150, 141, 0.58, 0.28], [141,150,0.55,0.28]
381 def opti_routine() :
382     best_value = 0
383     best_policy = 0
384     list_itt = []
385     list_itt.append("L'optimisation est terminée. Elle a été calculée avec un seuil de
d'admissibilité équivalent à : " + str(SEUIL_REVENU)+" . La fonction de choix social est : " +
str(repertoire()))+" .")
386     for i in [[ 130, 170, 0.60, 0.26]] : #j'itère sur plusieurs solutions initiales possibles.
        Pas d'importance pour l'algorithme DE.

```



```

387     #print ("Solution initiale : " + str(i))
388     gov = gouvernement(i)
389     opt= gov.opt
390     optimal_value = gov.utilite_sociale(opt)
391     print(opt)
392     info_itt = "La politique optimale est la suivante : " +str(opt)+" . La simulation a
393     t'elle convergée?" +str(gov.success)+" .
    for j in gov.students : #Dans l'objet gouvernement, bien que l'on doit calculer les
    étudiants à chaque fois. Les derniers calculés et stockés dans self.students sont ceux
    optimisant la fonction du gouvernement.
394         print(j.x_opt, j.effective_bourse, j.succ)
395         if j.w_etu*(j.semaine - j.x_opt[1] - j.x_opt[2])> j.seuil_revenu :
396             print("étudiant type 2")
397         list_itt.append(info_itt)
398     #print(gov.dep_bourse, gov.contribution_etu)
399     if (optimal_value > best_value and gov.success == True) :
400         best_value = optimal_value
401         best_policy = opt
402     else :
403         pass
404
405     message = "La meilleure politique est la suivante : " + str(best_policy) + ". La valeur de
    la fonction objective est de " + str(-best_value)
406     list_itt.append(message)
407     sendmail("\n".join(list_itt))
408     print (message)
409
410
411
412     # s'assurer d'avoir un répertoire qui peut accueillir les graphiques produits. Ensuite le
    code produira un repertoire spécifique en fonction de la fonction de choix social utilisé.
413 def repertoire():
414     if fonction_choix_social == 'u':
415         i = 'utilitarisme'
416     elif fonction_choix_social == 'r':
417         i = "rawls"
418     elif fonction_choix_social == "s":
419         i = "reussite"
420     return i
421
422 def titre_graph(): #cette fonction utilise la fonction de choix sociale et renvoie un élément
    textuel pour le titre et les axes des graphiques.
423     if fonction_choix_social == 'u' or fonction_choix_social == 'r':
424         titre = 'Utilité sociale '
425     elif fonction_choix_social == "s":
426         titre = "Probabilité de réussite "
427     return titre
428 """
429 #graphiques problème du gouvernement
430 """
431 def prod_graph():
432     os.chdir(r"C:\Users\Owner1\OneDrive\maîtrise
    énap\mémoire\simulation\figure_optimisation_reussite")
433     liste_bourse = []
434     liste_bourse_type1 = []
435     liste_bourse_type2 = []
436     liste_bourse_type3 = []
437     liste_loisir_type3 = []
438     liste_loisir_type1 = []
439     liste_pret = []
440     liste_contri = []
441     liste_taxe = []
442     jaco_bourse = []
443     jaco_pret = []
444     jacocontri = []

```

```

445 jaco_taxe = []
446 liste_effort = []
447 gov = gouvernement([0,0,0,0])
448
449 for m1 in np.linspace(0,100,80) :
450
451     y_test1 = [m1 + 100 , 191, 0.5, 0.25]
452     y_test2 = [300, m1 , 0.5, 0.25]
453     #res1_prime = gov.utilite_sociale([m1, 50, 0.40, 0.15], prime = 1)[0]
454     res2 = gov.utilite_sociale(y_test2)
455     #res2_prime= gov.utilite_sociale([100, m1, 0.15,0.15],prime = 1)[1]
456
457     res1 = gov.utilite_sociale(y_test1)
458     liste_bourse.append(res1/len(w_etu))
459     liste_pret.append(res2/len(w_etu))
460
461     somme1 = 0
462     count1 = 0
463     somme1a = 0
464     somme3a = 0
465     somme2 = 0
466     count2 = 1
467     somme3 = 0
468     count3 = 0
469
470     for i in gov.students :
471         if i.sup == True :
472             somme2 += i.probabilite(i.x_opt)
473
474         elif i.sous== True :
475             somme3 += i.probabilite(i.x_opt)
476             somme3a +=i.x_opt[1]
477             count3 +=1
478         else :
479             somme1 +=i.probabilite(i.x_opt)
480             somme1a += i.x_opt[1]
481             count1 += 1
482     liste_bourse_type1.append(somme1/count1)
483     liste_bourse_type2.append(somme2/count2)
484     liste_bourse_type3.append(somme3/count3)
485     liste_loisir_type1.append(somme1a)
486     liste_loisir_type3.append(somme3a)
487 for t in np.linspace (0 , 0.80,80):
488     somme = 0
489     y_test = [300, 50, t, 0.25]
490
491     john = etudiant(0, y_test)
492     #res3 = john.util_indirect()
493     res3 = gov.utilite_sociale(y_test)
494     liste_contri.append(res3/len(w_etu))
495
496 for t in np.linspace (0,1-w[0]/w[1] , 80):
497     res4 = gov.utilite_sociale([300, 50,0.5, t])
498     liste_taxe.append(res4/len(w_etu))
499
500 #générer des graphiques
501 plt.plot(np.linspace(0,0.80, 80), liste_contri)
502 #plt.title(titre_graph() + "en fonction du niveau \n de la contribution étudiante")
503 plt.xlabel("Taux de contribution étudiante")
504 plt.ylabel(titre_graph())
505 plt.savefig("contribution_" + repertoire()+".png", format="png", dpi=400)
506 plt.close()
507
508
509 plt.plot(np.linspace(0,1-w[0]/w[1],80), liste_taxe)

```

```

510 #plt.title(titre_graph()+"en fonction du niveau \n de l'impôt sur le revenu du diplômé")
511 plt.xlabel("Taux d'imposition sur le revenu du diplômé")
512 plt.ylabel(titre_graph())
513 plt.savefig("taxe_"+ repertoire()+" .png", format="png", dpi=400)
514 plt.close()
515
516 plt.plot (np.linspace(100,200,80),liste_bourse)
517 #plt.title(titre_graph()+"en fonction du niveau \n de bourse maximale octroyée")
518 plt.xlabel("Niveau de bourse maximale")
519 plt.ylabel(titre_graph())
520 plt.savefig("bourse_"+ repertoire()+" .png", format="png", dpi=400)
521 plt.close()
522
523 plt.plot (np.linspace(0,200,80),liste_pret)
524 #plt.title(titre_graph()+"en fonction du niveau \n de prêt octroyée")
525 plt.xlabel("Niveau de prêt")
526 plt.ylabel(titre_graph())
527 plt.savefig("pret_"+ repertoire()+" .png", format="png", dpi=400)
528 plt.close()
529
530 plt.plot (np.linspace(100,200,80),liste_bourse_type1)
531 #plt.title(titre_graph()+"en fonction du niveau \n de bourse maximale octroyée")
532 plt.xlabel("Niveau de bourse maximale")
533 plt.ylabel(titre_graph())
534 plt.savefig("bourse_type1_"+ repertoire()+" .png", format="png", dpi=400)
535 plt.close()
536 plt.plot (np.linspace(300,500,80),liste_bourse_type2)
537 #plt.title(titre_graph()+"en fonction du niveau \n de bourse maximale octroyée")
538 plt.xlabel("Niveau de bourse maximale")
539 plt.ylabel(titre_graph())
540 plt.savefig("bourse_type2_"+ repertoire()+" .png", format="png", dpi=400)
541 plt.close()
542 plt.plot (np.linspace(300,500,80),liste_bourse_type3)
543 #plt.title(titre_graph()+"en fonction du niveau \n de bourse maximale octroyée")
544 plt.xlabel("Niveau de bourse maximale")
545 plt.ylabel(titre_graph())
546 plt.savefig("bourse_type3_"+ repertoire()+" .png", format="png", dpi=400)
547 plt.close()
548
549 plt.plot (np.linspace(300,500,80),liste_loisir_type1)
550 #plt.title(titre_graph()+"en fonction du niveau \n de bourse maximale octroyée")
551 plt.xlabel("Niveau de bourse maximale")
552 plt.ylabel("Somme des heures consacrées au loisir")
553 plt.savefig("bourse_loisirtype1"+ repertoire()+" .png", format="png", dpi=400)
554 plt.close()
555 plt.plot (np.linspace(300,500,80),liste_loisir_type3)
556 #plt.title(titre_graph()+"en fonction du niveau \n de bourse maximale octroyée")
557 plt.xlabel("Niveau de bourse maximale")
558 plt.ylabel("Somme des heures consacrées au loisir")
559 plt.savefig("bourse_loisirtype3"+ repertoire()+" .png", format="png", dpi=400)
560 plt.close()
561
562 def graph_utilite(pol_util, pol_rawls) : #fonction montrant la différence d'utilité des
étudiants en fonction de leur salaire et du changement de politique. Cela permet de comprendre
la variation d'utilité
563     os.chdir(r"C:\Users\Owner1\OneDrive\maîtrise énap\mémoire\rédaction\latex")
564     salaires = [0]
565     for i in np.linspace(15,49, 49) :
566         salaires.append(i)
567     util_util = [etudiant(i, pol_util).util_indirect() for i in salaires]
568     util_rawls = [etudiant(i, pol_rawls).util_indirect() for i in salaires]
569     print(util_rawls)
570     fig, (ax_left, ax_right) = plt.subplots(
571         1, 2,
572         sharey=True,

```

```

573     figsize=(12, 6),
574     gridspec_kw={"width_ratios": [0.3, 8]} ) # Left panel is narrow
575 for ax in (ax_left, ax_right) :
576     ax.plot(
577         salaires,
578         util_util,
579         linewidth=1.5,
580         color="black",
581         linestyle= "-"
582     )
583     ax.plot(
584         salaires,
585         util_rawls,
586         linewidth=1.5,
587         color = "black",
588         linestyle="--"
589     )
590
591
592 custom_legend = [
593     Line2D([0], [0], color="black", linestyle="-", linewidth=1.5,
594            label="Utilité de l'étudiant dans la politique optimale utilitariste"),
595     Line2D([0], [0], color="black", linestyle="--", linewidth=1.5,
596            label="Utilité de l'étudiant dans la politique optimale rawlsienne"),
597 ]
598
599 ax_left.set_xlim(-0.1, 0.1)
600 ax_left.set_xticks([0])
601 ax_left.set_xticklabels(["$0"])
602 ax_right.set_xlim(15,35)
603 ax_right.set_xticks([15, 25, 35])
604 ax_right.xaxis.set_major_formatter(plt.FuncFormatter(lambda x, _: f"${x:.0f}"))
605 ax_left.spines["right"].set_visible(False)
606 ax_right.spines["left"].set_visible(False)
607 ax_right.tick_params(left=False)
608 d = 0.01 # size of diagonal lines
609 kwargs = dict(transform=ax_left.transAxes, color="k", clip_on=False, lw=1.2)
610 ax_left.plot( [1-d, 1+d], [-d, +d], **kwargs) # bottom-right of left panel
611 #ax_left.plot( [1-d, 1+d], [1-d, 1+d], **kwargs) # top-right of left panel
612 kwargs.update(transform=ax_right.transAxes)
613 ax_right.plot([-d, +d], [-d, +d], **kwargs) # bottom-left of right panel
614 #ax_right.plot([-d, +d], [1-d, 1+d], **kwargs) # top-left of right panel
615
616
617 fig.supxlabel("Salaire horaire de l'étudiant", fontsize=12, y=0.01)
618 ax_left.set_ylabel("Utilité", fontsize=12)
619 ax_right.legend(
620     handles=custom_legend,
621     loc='upper left',
622     fontsize='large',
623     markerscale=1.1,
624     labelspace=0.3,
625     handlelength=2,
626     borderpad=0.4
627 )
628
629 plt.tight_layout()
630 plt.savefig("utilite_diff.png", format="png", dpi=400)
631 plt.show()
632 plt.close()
633
634
635
636 prod_graph()
637 #opti_routine()

```

```
638 #test_student()
639 #graph_utilite([144.88409583, 147.84496048, 0.72701807, 0.23272021], [114.56319655,
185.56077209, 0.73826713, 0.21141423])
640
641
642
643 #fin du code. J'imprime le temps d'exécution à des fins indicatives.
644
645 end = time.time()
646
647 print(f'Le temps de calcul est de {end - start} secondes')
648
649
```